DIE GREEN–MATRIX FÜR ELLIPTISCHE SYSTEME ZWEITER ORDNUNG IN DIVERGENZFORM MIT STETIGEN KOEFFIZIENTEN

INAUGURAL–DISSERTATION

zur Erlangung des Doktorgrades

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität Düsseldorf

vorgelegt von

MARTIN FUCHS

aus Solingen

Düsseldorf 1983

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543915_0085

DIE GREEN-MATRIX FÜR ELLIPTISCHE SYSTEME ZWEITER ORDNUNG IN DIVERGENZFORM MIT STETIGEN KOEFFIZIENTEN

INAUGURAL-DISSERTATION
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Düsseldorf

vorgelegt von
M A R T I N F U C H S
aus Solingen

Düsseldorf 1983

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Inhalt

Einleitung	2
§ 0 Bezeichnungen und Hilfssätze	15
§ 1 A priori Abschätzungen für schwache Lösungen linearer elliptischer Systeme mit stetigen Koeffizienten	30
Anhang zu § 1	48
§ 2 Systeme mit Maßen als rechter Seite	54
§ 3 Definition und erste Eigenschaften der Green-Matrix	63
§ 4 Abschätzung der Singularität	79
§ 5 Anwendungen der Green-Matrix	98
§ 6 Anwendungen der lokalen Ergebnisse aus § 1	115
§ 7 Der zweidimensionale Fall: Konstruktion einer Green-Matrix bei nur meßbaren Leitkoeffizienten	126
Zusammenfassung	140
Literaturverzeichnis	142

Einleitung

Ist L ein linearer Differentialoperator, der auf Funktionen wirkt, die auf einem Gebiet Ω in $\mathbb{R}^n$ erklärt sind, so versteht man unter einer Fundamentallösung zu L auf Ω eine Funktion $k : \Omega \times \Omega \to [-\infty,\infty]$ von zwei Variablen, welche in jedem Punkt $y \in \Omega$ die Gleichung $L\,k(\cdot,y) = \delta_y$ im Distributionssinn auf Ω löst. (δ_y bezeichnet das Dirac-Maß in y.) Ist Ω beschränkt, so heißt k Green-Funktion zum Operator L auf dem Gebiet Ω, wenn $k(\cdot,y)$ für alle Punkte $y \in \Omega$ auf dem Rand $\partial\Omega$ des Gebietes verschwindet. Wir betrachten hier lineare elliptische Differentialoperatoren zweiter Ordnung; der einfachste Vertreter dieser Klasse ist der Laplace-Operator $\Delta := -\sum_{\alpha=1}^{n} D_\alpha D_\alpha$, für den man in der Potentialtheorie Green-Funktionen g auf beschränkten Gebieten Ω mit einfacher Geometrie (z.B. Kugeln, Kugelschalen) explizit berechnet und deren Wachstum in Dimensionen $n \geq 3$ charakterisiert wird durch

(1) $c(n) \cdot |x-y|^{2-n} \leq g(x,y) \leq C(n)\,|x-y|^{2-n}$ für alle $x,y \in \Omega$

mit positiven nur von der Raumdimension abhängenden Konstanten c(n), C(n).

Welches Interesse besteht nun daran, Green-Funktionen für den Laplace-Operator zu bestimmen oder zumindest die Existenz solcher Funktionen zu beweisen? Eine erste einfache Antwort gibt das "Superpositionsprinzip", nach welchem man die Lösung $u : \Omega \to \mathbb{R}$ des Dirichlet-Problems $\Delta u = f$ auf Ω, $u|_{\partial\Omega} = o$ als Faltungsprodukt $u(y) = \int_\Omega g(x,y) f(x)\,dx$, $y \in \Omega$, der Green-Funktion mit der "rechten Seite" f der Gleichung schreiben kann. Aus der Darstellungsformel gewinnt man unter Umständen (die Eigen-

schaften von g, also insbesondere die Abschätzungen (1), benutzend) Informationen über die Lösung u, die a priori nicht klar sind, man vergleiche dazu unsere Resultate in § 5.
Eine weniger offenkundige Anwendung beinhaltet der folgende Satz, den man durch Vergleich von harmonischen Funktionen mit g beweist:

Satz A: Ist h harmonisch auf dem punktierten Gebiet $\Omega - \{y\}$ und gilt mit einer reellen Konstanten $C \geq 0$ für alle Punkte $x \neq y$ aus einer beliebigen Umgebung von y die Abschätzung $|h(x)| \leq C \cdot g(x,y)$, so hat h die Form $h = h^* + C^* g(\cdot, y)$ mit einer Konstanten $C^* \in \mathbb{R}$ und einer auf ganz Ω harmonischen Funktion h^*.

Der Satz klassifiziert die isolierten Singularitäten gewisser Größenordnung bei harmonischen Funktionen in Termen der Green-Funktion g zu Δ auf dem betrachteten Gebiet Ω. Im Hinblick auf dieses Ergebnis ist man bestrebt, die Existenz einer Green-Funktion für allgemeinere elliptische Operatoren auf beschränkten Gebieten Ω zu beweisen, insbesondere für solche mit variablen Koeffizienten. Die größte Klasse von elliptischen Operatoren zweiter Ordnung, für die man einen Existenzsatz kennt, sind diejenigen in Divergenzform mit beschränkten und meßbaren Koeffizienten, also

$$(2) \quad Lu := - \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} D_\alpha (a_{\alpha\beta} D_\beta u) \quad \text{für Funktionen } u : \Omega \to \mathbb{R},$$

wobei die Koeffizienten $a_{\alpha\beta}$ aus $L^\infty(\Omega)$ sind und mit gewissen

Zahlen $\lambda, \Lambda > 0$ die Elliptizitätsbedingung

(3) $\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta \leq \Lambda|\xi|^2$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, $x \in \Omega$

erfüllen. Dieses Resultat findet sich erstmals in der Arbeit [15] von Littman, Stampacchia, Weinberger, wo allerdings noch die Symmetriebedingung $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ für $\alpha,\beta = 1,..,n$ vorausgesetzt werden muß. Grüter, Widman geben in [9] einen alternativen Existenzbeweis, die Hauptresultate lauten:

Satz B: (vgl. [9], (1.1) Theorem): Sei Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$; der Operator L sei wie in (2) definiert und erfülle (3). Unter diesen Voraussetzungen gibt es genau eine Funktion $g : \Omega \times \Omega \to [-\infty, \infty]$ mit den drei folgenden Eigenschaften:

(i) $g \geq 0$ (ii) $g(\cdot,y) \in H^{1,2}(\Omega - B_r(y)) \cap \overset{o}{H}{}^{1,1}(\Omega)$ für alle $r > 0$ und $y \in \Omega$ (iii) $Lg(\cdot,y) = \delta_y$ im Distributionssinn auf Ω für alle $y \in \Omega$.

g erfüllt mit Konstanten $K_1, K_2 > 0$ nur abhängig von n, λ, Λ

(iv) $\begin{cases} g(x,y) \leq K_1 \cdot |x-y|^{2-n} & \text{für alle } x,y \in \Omega \\ g(x,y) \geq K_2 \cdot |x-y|^{2-n} & \text{für alle } x,y \in \Omega \\ & \text{mit } |x-y| \leq \frac{1}{2}\operatorname{dist}(y,\partial\Omega) \end{cases}$

Hierin bezeichnen $H^{1,p}, \overset{o}{H}{}^{1,p}$ die üblichen Sobolev-Räume (vgl. §0). Von Interesse sind insbesondere die Abschätzungen (iv), die besagen, daß sich auch im allgemeinen Fall die im Satz definierte Green-Funktion g stets so verhält, wie es vom Laplace-Operator her geläufig ist.

Die Fragestellung, die in [15] zur Konstruktion der Green-Funktion führte, und die mit den Eigenschaften dieser Funktion in vollem Umfang beantwortet werden konnte, ist folgende: Man betrachtet auf dem Gebiet Ω die Lösung $u \in H^{1,2}(\Omega)$ von $Lu = o$ mit Randwerten $\varphi \in H^{1,2}(\Omega) \cap C^o(\overline{\Omega})$. Nach Standardaussagen der Regularitätstheorie (z.B. [8], Thm. 8.22) ist u lokal Hölder-stetig im Inneren von Ω. Da stetige Randwerte vorliegen, will man entscheiden, wann $x_o \in \partial\Omega$ "regulärer Randpunkt" für L und Ω ist, d.h. wann gilt $\lim_{\Omega \ni x \to x_o} u(x) = \varphi(x_o)$ für alle φ und u mit den oben genannten Eigenschaften? Die Antwort lautet mit [15]: x_o ist genau dann regulärer Randpunkt für L und Ω, wenn dies für Δ und Ω der Fall ist.

Eine weitere Anwendung der Green-Funktion findet sich in der "Regularitätstheorie diagonaler elliptischer Systeme mit quadratischem Wachstum", d.h. man betrachtet schwache Lösungen $u \in H^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ des Systems

(4) $Lu^i = f^i(\cdot, u, \nabla u)$, $i = 1,..,N$, auf Ω (L wie in (2)) mit vorgegebener Funktion $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{nN}$, die "auf der Lösung" u mit Konstanten $a, b \geq o$ die Ungleichung $|f(\cdot, u, \nabla u| \leq a \cdot |\nabla u|^2 + b$ erfüllt. Hildebrandt, Widman beweisen in [10]|[11] folgende Aussage: Ist die Lösung u von (4) beschränkt und gilt $a \cdot \sup_{\Omega} |u| < \lambda$, so ist u lokal Hölder-stetig auf Ω. Man setzt zum Beweis in die Integralform von (4) bei fixiertem $y \in \Omega$ den Testvektor $\eta^2 \cdot g(\cdot, y)\, u$ ein, wo die "Abschneidefunktion" η auf einer Kugelschale $B_{2R}(y) - \overline{B_R}(y)$ um den Punkt y konzentriert ist. Sorgfältige Zerlegung der resultierenden Terme unter Berück-

sichtigung der in beiden Richtungen gültigen Abschätzung von $g(x,y)$ durch die Potenz $|x-y|^{2-n}$ (in Dimensionen $n \geq 3$) führt auf folgende Ungleichung für das gewichtete Dirichlet-Integral

$$\int_{B_R(y)} |x-y|^{2-n} \, |\nabla u(x)|^2 dx \leq c \cdot \int_{B_{2R}(y)} |x-y|^{2-n} \, |\nabla u(x)|^2 dx < \infty$$

mit einer positiven Konstanten $c < 1$, die nicht von R abhängt. Dieses Ergebnis läßt sich leicht in eine "Dirichlet-Growth-Bedingung" umsetzen und liefert mit dem Dirichlet-Growth-Theorem (z.B. [18] Thm. 3.5.2) die Regularität von u.

Die genannten Beispiele zeigen die Bedeutung des Konzepts der Green-Funktion zur Klärung der verschiedensten Probleme im Bereich der elliptischen Differentialgleichungen und Systeme zweiter Ordnung, insbesondere erweist es sich als wichtig, das Wachstum dieser Funktion genau zu kennen.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, das Analogon zur Green-Funktion im Falle von linearen elliptischen Systemen zweiter Ordnung in Divergenzform zu studieren, d.h. die Existenz einer Green-Matrix $G = (G^j_k)_{1 \leq j,k \leq N} : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}^{N^2}$ für Matrix-Operatoren $(L_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}$ der Form

(5) $$\sum_{j=1}^{N} L_{ij} \, u^j := - \sum_{j=1}^{N} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} D_\alpha (A^{ij}_{\alpha\beta} \, D_\beta \, u^j) \quad \text{für Funktionen}$$

$u : \Omega \to \mathbb{R}^N$, $i = 1,..,N$, auf beschränkten Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ zu beweisen, wenn $N \in \mathbb{N}$ beliebig vorgegeben ist, und die Leitkoeffizienten $A^{ij}_{\alpha\beta}$, $i,j = 1,..,N$, $\alpha,\beta = 1,..,n$, beschränkte meßbare Funktionen $\Omega \to \mathbb{R}$ sind, die mit positiven reellen Zahlen λ, Λ die (sehr starke) Elliptizitätsbedingung

(6) $\lambda|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{N} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} A_{\alpha\beta}^{ij}(x)\xi_\alpha^i\xi_\beta^j \le \Lambda|\xi|^2$ für alle $x \in \Omega$,

$\xi \in \mathbb{R}^{nN}$ erfüllen. Wir nennen dann G Green-Matrix zu

$(L_{ij})_{1\le i,j\le N} := (-\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} D_\alpha(A_{\alpha\beta}^{ij} D_\beta))_{1\le i,j\le N}$ auf dem Gebiet Ω,

wenn gilt:

(7)
$$\begin{cases} \text{es gibt ein } \varepsilon > 0 \text{ mit } G(\cdot,y) \in \overset{o}{H}{}^{1,1+\varepsilon}(\Omega,\mathbb{R}^{N^2}) \text{ für alle } y \in \Omega \\ \sum_{j=1}^{N} L_{ij}G_k^j(\cdot,y) = \delta_{ik}\,\delta_y \text{ im Distributionssinn auf } \Omega \\ \qquad \text{für } i,k = 1,..,N \text{ und } y \in \Omega\ . \end{cases}$$

Im Fall N = 1 kann man sich die Green-Funktion g zum Operator L aus (2) auf zwei verschiedene Weisen verschaffen: Grüter, Widman betrachten in [9] für $y \in \Omega$ und $\rho > 0$ zunächst die gemittelte Green-Funktion $g^\rho(\cdot,y)$, die als die $\overset{o}{H}{}^{1,2}(\Omega)$-Lösung von

$$Lu = \frac{1}{L^n(B_\rho(y))} \cdot \chi_{B_\rho(y)} \qquad (L^n = \text{n-dimensionales Lebesgue-Maß, } \chi_{B_\rho(y)} = \text{charakteristische Funktion von } B_\rho(y))$$

definiert ist. Man beweist in der angegebenen Reihenfolge unter der Voraussetzung $n \ge 3$ folgende Aussagen (vgl. [9], (1.1) Theorem):

(i) $g^\rho(\cdot,y) \ge 0$ (ii) $g^\rho(\cdot,y) \in L^*_{\frac{n}{n-2}}(\Omega)$

(iii) $g^\rho(\cdot,y) \le K(n,\lambda,\Lambda)|x-y|^{2-n}$ (iv) $\nabla g^\rho(\cdot,y) \in L^*_{\frac{n}{n-1}}(\Omega,\mathbb{R}^n)$

(v) $\|g^\rho(\cdot,y)\|_{\overset{o}{H}{}^{1,s}(\Omega)}$ ist für alle Exponenten s mit $1 \le s < \frac{n}{n-1}$ unabhängig von ρ und y beschränkt.

($L^*_p(\Omega)$ ist ein gewisser Banachraum von Funktionen mit $\bigcap_{1\le r<p} L^r(\Omega) \subsetneq L^*_p(\Omega) \subsetneq L^p(\Omega)$.) Aus (v) folgt durch Auswahl von bei

$\rho \downarrow 0$ schwach konvergenten Folgen ($y \in \Omega$ beliebig aber fest) die Existenz der in Satz B genannten Green-Funktion g, überdies übertragen sich im Limes $\rho \downarrow 0$ die Abschätzungen für g^ρ auch auf g.

Im uns interessierenden Fall $N > 1$ kann man zwar "gemittelte Green-Matrizen" $G^\rho(\cdot,y)$ nach wie vor einführen, aber die oben genannten Schritte nicht mehr nachvollziehen, da man in der skalaren Situation an entscheidender Stelle die Positivität der gemittelten Green-Funktionen benötigt.

Praktikabel auch im allgemeinen Fall $N > 1$ ist die "Dualisierungsmethode" von Littman, Stampacchia, Weinberger, die in der Arbeit [15] beschrieben wird: Bei diesem funktionalanalytischen Zugang zur Green-Funktion löst man mit dem Lax-Milgram-Theorem die transponierte Gleichung $L^t u = -\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} D_\beta (a_{\alpha\beta} D_\alpha u) = T$ (Voraussetzungen wie in (3)) bei vorgegebener rechter Seite $T \in H^{-1,2}(\Omega)$ (:= Raum aller Distributionen, die Ableitungen von $L^2(\Omega)$-Funktionen sind) schwach in $\overset{o}{H}{}^{1,2}(\Omega)$ und gewinnt so einen stetigen Operator $S : H^{-1,2}(\Omega) \to \overset{o}{H}{}^{1,2}(\Omega)$, für den nach bekannten Sätzen aus der Regularitätstheorie gilt (vgl. z.B. [8], chapter 8.10):

(*) Für reelle $p > n$ ist $S_p := S|_{H^{-1,p}(\Omega)}$ ein stetiger Operator $H^{-1,p}(\Omega) \to C_o^o(\Omega)$. ($H^{-1,p}(\Omega)$ bezeichnet den Raum der Distributionen, die Ableitungen erster Ordnung von L^p-Funktionen sind; $C_o^o(\Omega) := \{f \in C^o(\overline{\Omega}) : f|_{\partial\Omega} \equiv o\}$) Durch Dualisieren von S_p gewinnt man einen Operator $S_p^* : C_o^o(\Omega)^* \to H^{-1,p}(\Omega)^*$. Der Dualraum zu $C_o^o(\Omega)$ besteht genau aus den signierten Radon-Maßen auf Ω von endlicher totaler Variation, und $H^{-1,p}(\Omega)^*$ ist in

kanonischer Weise isomorph zum Sobolev-Raum $\overset{o}{H}{}^{1,p'}(\Omega)$, $p' := \frac{p}{p-1}$. In der Arbeit [15] wird sodann gezeigt: Die Funktion $S_p^*(\mu)$ löst im Distributionssinn die Gleichung $Lu = \mu$ auf Ω, wenn immer rechts ein signiertes Maß $\mu \in C_o^o(\Omega)^*$ vorgegeben ist. Mit der Wahl $\mu = \delta_y$, $y \in \Omega$, folgt die Existenz der Green-Funktion.

Die Regularität der $\overset{o}{H}{}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R})$-Lösung u von $L^t u = T$, $T \in H^{-1,p}(\Omega)$ für ein $p > n$, impliziert also die Existenz der Green-Funktion mit den Eigenschaften aus Satz B. In gewisser Weise gilt auch die Umkehrung: Setzt man voraus, daß es eine Funktion g wie in Satz B gibt, so liefert die in [10] beschriebene "Lochmethode" (innere) Regularität schwacher Lösungen von $L^t u = T$ bei genügend "guter" rechter Seite T.

Im Falle von Systemen müssen wir also Bedingungen an die Koeffizientenmatrix $(A_{\alpha\beta}^{ij})_{\substack{1\le i,j\le N \\ 1\le \alpha,\beta\le n}}$ finden, welche einen Regularitätssatz der Form (*) garantieren: Bei nur meßbaren und beschränkten Koeffizienten ist (*) i.a. nicht erfüllt, beispielsweise gibt es unstetige schwache Lösungen des homogenen Systems ([7],p. 57), und im Hinblick auf die Bemerkung, daß die Existenz einer Green-Matrix weitgehend aequivalent ist zur Regularität schwacher Lösungen bei "guter" rechter Seite, besteht wenig Hoffnung, G gemäß (7) zu konstruieren. (Im übrigen würde $G(\cdot,y)$ durch (7) bei nur meßbaren und beschränkten Koeffizienten nicht eindeutig festgelegt, vgl. die Beispiele in [19].)

Vernünftige Bedingungen an die Koeffizienten, die die Gültigkeit von (*) implizieren, sind nun neben der Elliptizitätsbedingung (6):

(8) $A_{\alpha\beta}^{ij} \in C^0(\bar{\Omega})$ für $i,j = 1,..,N$, $\alpha,\beta = 1,..,n$ oder

(9) $A_{\alpha\beta}^{ij} \in L^\infty(\Omega)$ mit $A_{\alpha\beta}^{ij} = A_{\beta\alpha}^{ji}$ für $i,j = 1,..,N$, $\alpha,\beta = 1,..,n$ und $\frac{\lambda}{\Lambda}$ liegt nahe bei 1.

Bei (9) reduziert man die Situation durch ein Störungsargument auf den Fall, daß links der Laplace-Operator steht und beruft sich dann auf bekannte Resultate über schwache Lösungen der Poisson-Gleichung. Wir werden nachfolgend hauptsächlich den Fall (8) stetiger Koeffizienten betrachten, und die Existenz von G im Sinne von (7) beweisen sowie Eigenschaften dieser Matrix mit potentialtheoretischen Methoden untersuchen. Um hierbei eine geschlossene Darstellung zu wahren, nehmen wir $n \geq 3$ an. Der Fall $n = 2$ wird gesondert unter der Voraussetzung $A_{\alpha\beta}^{ij} \in L^\infty(\Omega)$ behandelt, das bietet sich an, weil für $n = 2$ keine Bedingung an $\frac{\lambda}{\Lambda}$ gebraucht wird, und man überdies einen Eindeutigkeitssatz für die Green-Matrix in einer natürlichen Funktionenklasse zur Verfügung hat.

In § 1 der Arbeit stellen wir bei stetiger Koeffizientenmatrix die zur "Dualisierung" nötigen Regularitätsaussagen zusammen, die (*) für den vektorwertigen Fall liefern: die sogenannte "L^p-Theorie für Systeme" ist in Kapitel VI von Morrey's Buch [18] dargestellt; wir benötigen daneben detaillierte lokale Aussagen. In diesem Teil der Arbeit kann man die sehr starke Elliptizitätsbedingung (6) ersetzen durch die schwächere Legendre-Hadamard-Bedingung

(6)' $\sum_{i,j=1}^{N} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} A_{\alpha\beta}^{ij}(x)\xi_\alpha\xi_\beta\eta^i\eta^j \geq \lambda|\eta|^2\cdot|\xi|^2$ für alle $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\eta \in \mathbb{R}^N$, beispielsweise bleiben Satz 1 und 2 auch im Fall

(6)' gültig. Wir benötigen die Voraussetzung (6) viel mehr dann, wenn es darum geht, das System

(10) $L_{ij}u^j = T^i$, $i = 1,..,N$ (Summationskonvention)

bei gegebenen $T^i \in H^{-1,2}(\Omega)$ schwach im Sobolev-Raum $\overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ zu lösen: Dabei bedienen wir uns des Lax-Milgram-Theorems, welches eine strikte Definitheitsbedingung der Form (6) erfordert. Hat man dagegen nur die Information (6)', so sind Existenzaussagen für das System (10) in o.g. Sinn nicht mehr uneingeschränkt möglich; es gilt dann die Gårdingsche Ungleichung ([18], Thm. 6.5.1), aus der man strikte Definitheit abliest, wenn z.B. das Maß des betrachteten Gebietes Ω genügend klein ist. Wir wollen von solchen Einschränkungen absehen und verlangen daher grundsätzlich (6).

Mit den Sätzen aus § 1 können wir das elliptische System

$L_{ij}u^j = \mu^i$, $i = 1,..,N$ auf Ω

im Distributionssinn lösen, wenn rechts ein beliebiges vektorwertiges signiertes Radon-Maß $\mu = (\mu^1,..,\mu^N)$ auf Ω von endlicher totaler Variation vorgegeben ist. Durch Spezialisierung der Maße μ folgt die Existenz einer Green-Matrix

$(G^i_k)_{1\le i,k\le N} : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}^{N^2}$ zur Differentialoperator-Matrix $(L_{ij})_{1\le i,j\le N}$ also einer Lösung des Problems (7) mit der Eigenschaft $G(\cdot,y) \in \bigcap_{1\le r<\frac{n}{n-1}} \overset{\circ}{H}{}^{1,r}(\Omega,\mathbb{R}^{N^2})$ für alle Punkte $y \in \Omega$,

und wir können zeigen, daß G durch die Bedingungen (7) bereits eindeutig festgelegt wird. §3 ist der Untersuchung einiger elementarer Eigenschaften von G gewidmet: Wir führen zunächst analog zum Vorgehen von Grüter, Widman ([9]) gemittelte Green-Matrizen ein und beweisen damit Symmetrieeigenschaften von G

sowie die Aussage, daß G als Funktion von zwei Variablen stetig ist auf $\Omega \times \Omega - \{(x,x): x \in \Omega\}$. Schließlich übertragen wir das eingangs erwähnte Superpositions-Prinzip, indem wir eine Darstellungsformel für die schwache Lösung u mit Nullrandwerten des Systems

$$L_{ij}u^j = \mu^i,\ i = 1,..,N,\quad \mu^i \in C_o^o(\Omega)^*$$

angeben: u ist fast überall gleich dem mit Kern G und Maß μ gebildeten Potential.

In § 4 diskutieren wir das Wachstum der Green-Matrix: Man fixiert einen Punkt $y \in \Omega$ und schreibt $G(\cdot,y) = E(\cdot,y) + R$ lokal bei y, wo $E(\cdot,y)$ eine Fundamentallösung zum Operator mit konstanten Koeffizienten $A^{ij}_{\alpha\beta}(y)$ ist, und R als bei y reguläre Funktion nachgewiesen wird. $E(\cdot,y)$ gewinnt man z.B. durch Fourier-Transformation, und aus der expliziten Formel für $E(\cdot,y)$ liest man das Wachstumsverhalten für $x \to y$ ab. So erhält man Aufschluß über die Größenordnung von $G(\cdot,y)$ lokal bei y.
Unter der Voraussetzung, daß die Koeffizienten einer α-Hölder-Bedingung genügen, erhalten wir folgende Abschätzungen für Punkte x nahe bei y (es wird $n \geq 3$ angenommen):

$$\underline{(11)}\ |G(x,y)| \leq \text{const} \cdot |x-y|^{2-n},\quad \underline{(12)}\ |\nabla_x G(x,y)| \leq \text{const} \cdot |x-y|^{1-n}$$

(12) folgt hierbei aus (11) mit der sogenannten Campanato-Methode (vgl. z.B. [4], [7]). Ferner können wir die Hölder-Stetigkeit von $\nabla_x G(\cdot,y)$ auf Ringgebieten $B_{2R}(y) - \overline{B_R}(y)$ beweisen und das Verhalten der Hölder-Konstante bei $R \downarrow o$ beschreiben.

In § 5 geben wir einige Anwendungen der Green-Matrix: Wir beginnen mit folgendem Analogon zu Satz A:
Ist u schwache Lösung von $L_{ij}u^j \equiv o$ auf $\Omega - \{y\}$, und gilt lokal

bei y $|u(x)| \le C \cdot |x-y|^{1+\varepsilon-n}$ mit Konstanten $\varepsilon > o$, $C \ge o$, so hat u die Form $u = v + C_i G_i(\cdot,y)$ mit Konstanten $C_i \in \mathbb{R}$ und einer bei y regulären Lösung von $L_{ij}v^j = o$.

Daran anschließend untersuchen wir die Eigenschaften der schwachen Lösung u mit Nullrandwerten des Systems $L_{ij}u^j = \mu^i$, $i = 1,..,N$, wenn die signierten Maße μ^i für eine Zerlegung $\mu^i = \mu^i_+ - \mu^i_-$ mit Maßen μ^i_+, μ^i_- der Bedingung

$$\underline{(13)} \quad \sup_{y \in \Omega} \int_{\Omega} |x-y|^{2-n} \, d \sum_{i=1}^{N} (\mu^i_+ + \mu^i_-)(x) < \infty$$

genügen; beispielsweise gilt (13), wenn man für μ^i die Einschränkung des Hausdorff-Maßes H^{n-1} auf den Durchschnitt einer kompakten (n-1)-dimensionalen Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ mit Ω betrachtet. Wir zeigen, daß jeder Punkt $x \in \Omega$ Lebesgue-Punkt von u ist. Überdies ist u lokal beschränkt und hat gewisse Stetigkeitseigenschaften. Mit diesen Erkenntnissen ist es möglich, Regularitätssätze von Hildebrandt, Widman aus [11] über diagonale Systeme mit quadratischem Wachstum auf den Fall "voller Systeme" zu übertragen.

Schließlich beschreiben wir in § 6 zwei Anwendungen unserer lokalen Ergebnisse aus § 1: Wir beginnen mit einem neuen Beweis für einen bekannten Liouville-Satz von Meier ([16]), der lautet:

> Ist $u \in H^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ schwache Lösung von $L_{ij}u^j \equiv o$ auf $\mathbb{R}^n$ mit Koeffizienten $A^{ij}_{\alpha\beta} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, die (6) genügen und nur wenig von Konstanten abweichen, so ist die Funktion u konstant, wenn u im Unendlichen nicht zu stark anwächst.

In unserem Beweis schätzen wir für ein reelles $q > n$ die $H^{1,q}$-Norm von u über Kugeln $B_R(o)$ ab und sehen mit dem Sobolev-Einbettungssatz, daß die Oszillation von u gegen o geht bei $R \uparrow \infty$. Ferner liefern die Methoden aus § 1 ein Weylsches Lemma für "sehr schwache Lösungen" u des Systems

(14) $L_{ij}u^j = f^i$, $i = 1,..,N$, auf Ω.

Wir zeigen nämlich, daß jede Funktion $u \in L^p_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ für ein reelles $p > 1$, die das System (14) bei gegebener rechter Seite $f \in L^p_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ im Distributionssinn löst, erste schwache Ableitungen in $L^p_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ hat. Sätze von diesem Typ findet man bei Agmon ([3]), die dort allerdings auf komplizierterem Weg mit dem Differenzenquotientenverfahren bewiesen werden.

Abschließend wenden wir uns in § 7 dem bisher nicht behandelten Fall $n = 2$ zu, wobei die Koeffizienten als meßbar und beschränkt vorausgesetzt werden. Die Regularitätsaussage $(*)$ von Seite 8 wird mit einem Lemma von Gehring abgeleitet ([7]), und die Dualisierungsmethode ergibt eine Lösung von (7), die in der natürlichen Klasse $\bigcap_{1\le r<2} \overset{o}{H}{}^{1,r}(\Omega,\mathbb{R}^{N^2})$ eindeutig ist. Zum Beweis der kanonischen Abschätzung von $|G(x,y)|$ benötigen wir allerdings wieder eine Hölder-Bedingung an die Koeffizienten.

Für die dauernde Unterstützung dieser Arbeit bin ich meinem Lehrer Prof. Dr. Klaus Steffen zu großem Dank verpflichtet.

§ 0 Bezeichnungen und Hilfssätze

Zunächst fassen wir zusammen, welche Funktionenklassen nachfolgend auftreten. Dabei sei $n \in \mathbb{N}$ stets ≥ 2, $N \in \mathbb{N}$ sei beliebig. Für eine Borel-Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ wird mit $|A|$ oder $L^n(A)$ das n-dimensionale Lebesgue-Maß bezeichnet, für $m < n$ ist $H^m(A)$ das m-dimensionale Hausdorff-Maß von A. Ist $h : A \to \mathbb{R}^N$ meßbar, so sei für $1 \leq q \leq \infty$

$$\|h\|_{L^q(A,\mathbb{R}^N)} := \Big(\int_A |h|^q \, dx\Big)^{1/q} \quad , \quad \text{wenn } q < \infty$$

$$\|h\|_{L^\infty(A,\mathbb{R}^N)} := \operatorname*{ess\,sup}_A |h| \qquad (\text{kürzer: } \sup_A |h|)$$

Der Lebesgue-Raum $L^q(A,\mathbb{R}^N)$ ist der Banach-Raum (von Aequivalenzklassen) von meßbaren Funktionen $h : A \to \mathbb{R}^N$, für die $\|h\|_{L^q(A,\mathbb{R}^N)}$ endlich ist. Ist Ω offen in $\mathbb{R}^n$, so besteht $L^q_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ aus allen (Aequivalenzklassen von) meßbaren Funktionen $h : \Omega \to \mathbb{R}^N$ mit $h|_D \in L^q(D,\mathbb{R}^N)$ für alle offenen Mengen D mit kompaktem Abschluß in Ω.

Eine Funktion $h : \Omega \to \mathbb{R}^N$ gehört zum Sobolev-Raum $H^{1,q}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, $1 \leq q \leq \infty$, wenn $h \in L^q(\Omega,\mathbb{R}^N)$ gilt und h erste Distributionsableitung in $L^q(\Omega,\mathbb{R}^N)$ hat. Durch

$$\|h\|_{H^{1,q}(\Omega,\mathbb{R}^N)} := \|h\|_{L^q(\Omega,\mathbb{R}^N)} + \|\nabla h\|_{L^q(\Omega,\mathbb{R}^{nN})}$$

wird $H^{1,q}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ zum Banachraum. Analog definiert man für natürliche $k > 1$ die Sobolev-Räume $H^{k,q}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ der Stufe k. Ist $C^\infty_{kpt}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ die Menge aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in Ω, so bezeichnet $\overset{\circ}{H}{}^{1,q}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ den Abschluß von $C^\infty_{kpt}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ in $H^{1,q}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ bzgl. $\|\cdot\|_{H^{1,q}(\Omega,\mathbb{R}^N)}$. Man sagt, daß $\overset{\circ}{H}{}^{1,q}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ die Sobolev-Funktionen $u \in H^{1,q}(\Omega,\mathbb{R}^N)$

mit Nullrandwerten enthält. Der Raum $H^{1,q}_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ wird analog zu $L^q_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ definiert. $H^{1,q}_{kpt}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ schließlich besteht aus allen Funktionen$\in H^{1,q}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ mit kompaktem Träger in Ω. Genauere Informationen über die Lebesgue- und Sobolev-Räume findet man z.B. bei Adams [1]. In enger Beziehung zu den Lebesgue-Räumen stehen die Morrey- und Campanato-Räume, vgl. [7]: Seien $p \geq 1$, $\lambda \geq 0$ reelle Zahlen, und Ω sei offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{diam}(\Omega) < \infty$. $u \in L^p(\Omega,\mathbb{R}^N)$ gehört zum Morrey-Raum $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, falls gilt:

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega,\mathbb{R}^N)} := \left\{ \sup_{\substack{x_0 \in \Omega \\ 0<\rho\leq \operatorname{diam}(\Omega)}} \rho^{-\lambda} \int_{B_\rho(x_0)\cap\Omega} |u|^p dx \right\}^{1/p} < \infty,$$

$$B_\rho(x_0) := \{y \in \mathbb{R}^n : |x_0 - y| < \rho\}$$

Wir definieren nun die Campanato-Räume (vgl.[4]): Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte offene Menge, D^* bezeichne die äußere Parallelmenge zu D im Abstand diam(D), p und λ seien wie oben. u liegt im Campanato-Raum $L^{p,\lambda}(D,\mathbb{R}^N)$, wenn $u \in L^p(D^*,\mathbb{R}^N)$ ist mit

$$[u]_{L^{p,\lambda}(D,\mathbb{R}^N)} := \left\{ \sup_{\substack{x_0 \in D \\ 0<\rho\leq \operatorname{diam}(D)}} \rho^{-\lambda} \int_{B_\rho(x_0)} |u - (u)_{x_0,\rho}|^p dx \right\}^{1/p} < \infty.$$

Als Abkürzung für die Mittelwerte haben wir hierbei verwendet:

$$(u)_{x_0,\rho} := \fint_{B_\rho(x_0)} u\, dx := \frac{1}{|B_\rho(x_0)|} \int_{B_\rho(x_0)} u\, dx$$

Anmerkung: Im Fall N = 1 benutzen wir die Notationen $L^q(\Omega)$, $H^{1,q}(\Omega)$ et

Wir zitieren jetzt eine Reihe wichtiger Eigenschaften von Funktionen

aus den angegebenen Funktionenräumen.

Lemma 0.1: Sobolev-Einbettungssätze (vgl. [8], [14], [18])

(i) Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \le q < n$ und $u \in \overset{o}{H}{}^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Dann gilt

$$\|u\|_{L^s(\Omega,\mathbb{R}^N)} \le C(n,N,q) \cdot \|\nabla u\|_{L^q(\Omega,\mathbb{R}^{nN})}$$

mit dem Sobolev-Exponenten $s := \frac{nq}{n-q}$.

(ii) Ist $1 \le q < n$ und $u \in H^{1,q}(B_R(x_o), \mathbb{R}^N)$ für $x_o \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$, so ist

$$\|u\|_{L^s(B_R(x_o),\mathbb{R}^N)} \le C(n,N,q) \cdot {}^*\|u\|_{H^{1,q}(B_R(x_o),\mathbb{R}^N)}, \quad s := \frac{n \cdot q}{n-q}.$$

(Definition von ${}^*\|\cdot\|$ s.u.)

(iii) Die Abschätzung (ii) gilt mit derselben Konstanten und und $\|\nabla u\|_{L^q(B_R(x_o),\mathbb{R}^{nN})}$ rechts, wenn $\int_{B_R(x_o)} u \, dx = 0$ ist.

(iv) Ist $u \in H^{1,q}(B_R(x_o), \mathbb{R}^N)$ für ein $1 \le q < n$ und gilt mit einer positiven Konstanten γ

$L^n(\{x \in B_R(x_o) : u(x) = o\}) \ge \gamma \cdot R^n$, so folgt

$$\|u\|_{L^s(B_R(x_o),\mathbb{R}^N)} \le C(n,N,\gamma,q) \cdot \|\nabla u\|_{L^q(B_R(x_o),\mathbb{R}^{nN})}, \quad s := \frac{nq}{n-q}.$$

(v) Ist $n < q < \infty$ und $u \in H^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ für ein beschränktes konvexes Gebiet Ω, so ist $u \in C^o(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ mit

$$\sup_{\Omega} |u| \le C(n,N,q) |\Omega|^{-1/q} \{\|u\|_{L^q(\Omega,\mathbb{R}^N)} + \operatorname{diam}(\Omega) \|\nabla u\|_{L^q(\Omega,\mathbb{R}^{nN})}\}.$$

Ist Ω nicht konvex, aber Lipschitz-Gebiet, so gilt eine analoge Ungleichung, allerdings hängt C dann auch von Ω ab.

Anmerkungen: 1) Auf den Sobolev-Räumen $H^{k,q}(B_R(x_o), \mathbb{R}^N)$, $k \in \mathbb{N}$,

$1 \le q < \infty$, definiert man eine zur Standardnorm aequivalente Norm $*\|\cdot\|_{H^{k,q}(B_R(x_o),\mathbb{R}^N)}$ durch

$$*\|u\|_{H^{k,q}(B_R(x_o),\mathbb{R}^N)} := \sum_{i=o}^{k} R^{-i} \|\nabla^{k-i} u\|_{L^q(B_R(x_o))},$$

um eine Norm zu bekommen, die sich bezüglich Transformationen des Gebietes durch Homothetien wie die L^q-Norm verhält.

2) Ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt Lipschitz, wenn $\partial\Omega$ lokal Graph von Lipschitz-Funktionen $\mathbb{R}^{n-1} \supset U(\text{offen}) \to \mathbb{R}$ ist, wobei Ω lokal stets auf einer Seite von $\partial\Omega$ liegt.

3) Da die Aussagen (iii)/(iv) weniger geläufig sind, geben wir einen Beweis von (iv): Wäre (iv) falsch, so könnte man eine Folge $\{u_m\}$ in $H^{1,q}(B,\mathbb{R}^N)$, $B := B_R(x_o)$, finden mit (o.E.)

$$\|u_m\|_{H^{1,q}(B,\mathbb{R}^N)} = 1, \quad \|u_m\|_{L^s(B,\mathbb{R}^N)} > m \cdot \|\nabla u_m\|_{L^q(B,\mathbb{R}^{nN})}$$

und $L^n(A_m) \ge \gamma R^n$, $A_m := \{x \in B : u_m(x) = 0\}$.

Benutzt man Kompaktheit der Einbettung $H^{1,q}(B,\mathbb{R}^N) \to L^q(B,\mathbb{R}^N)$ (vgl. [1], Thm. 6.2), so kann man o.E. $u_m \xrightarrow[m\to\infty]{} u$ in $L^q(B,\mathbb{R}^N)$ für eine Funktion u aus $L^q(B,\mathbb{R}^N)$ annehmen. Nach (ii) ist $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ beschränkt in $L^s(B,\mathbb{R}^N)$, was $\nabla u_m \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ in $L^q(B,\mathbb{R}^{nN})$ bedeutet. Folglich ist $u \in H^{1,q}(B,\mathbb{R}^N)$ mit $\nabla u \equiv 0$, also $u \equiv \text{const}$.

Andrerseits gilt: $0 = \lim_{m\to\infty} \int_\Omega |u_m - u|^q \, dx = \lim_{m\to\infty} \sup \int_{A_m} |u_m - u|^q \, dx =$

$$\lim_{m\to\infty} \sup L^n(A_m) |u|^q = \gamma R^n |u|^q,$$

also $u = 0$. Das widerspricht $u_m \xrightarrow{m\to\infty} u$ in $H^{1,q}(B,\mathbb{R}^N)$ und $\|u_m\|_{H^{1,q}(B,\mathbb{R}^N)} = 1$. Folglich findet man eine Konstante C mit $\|u\|_{L^s(B,\mathbb{R}^N)} \le C \|\nabla u\|_{L^q(B,\mathbb{R}^{nN})}$. Daß C nicht von R abhängt, sieht

man durch Transformation. Die Aussage (iii) folgt mit ähnlichen Argumenten.

Lemma 0.2: Poincaré-Ungleichung ([8], [14], [18])

Ist Ω offen mit $L^n(\Omega) < \infty$ und $1 \le q < \infty$, so gilt für alle Funktionen $u \in \overset{o}{H}{}^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ die Abschätzung

$$\|u\|_{L^q(\Omega,\mathbb{R}^N)} \le C(n,N) L^n(\Omega)^{1/n} \cdot \|\nabla u\|_{L^q(\Omega,\mathbb{R}^{nN})} .$$

Ist Ω eine Kugel in $\mathbb{R}^n$, so kann man auch $u \in H^{1,q}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ mit $\int_\Omega u \, dx = 0$ zulassen.

Folgendes Lemma bettet die Campanato-Räume in die üblichen Hölder-Klassen ein:

Lemma 0.3: Seien $1 \le p < \infty$ und $\lambda \in]n, n+p]$ reelle Zahlen. Dann gilt für jedes beschränkte Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$: Die Elemente u von $L^{p,\lambda}(D,\mathbb{R}^N)$ sind Hölder-stetig auf $\bar{D}$ mit Hölder-Exponent $\alpha := \frac{\lambda - n}{p}$. Ferner hat man die folgenden Abschätzungen

$$|u(x)-u(y)| \le C(n,N,\lambda,p)[u]_{L^{p,\lambda}(D,\mathbb{R}^N)} |x-y|^\alpha \quad \text{für alle } x,y \in \bar{D},$$

$$\sup_D |u| \le C(n,N,\lambda,p)\{L^n(D)^{-1/p} \cdot \|u\|_{L^p(D,\mathbb{R}^N)} + \operatorname{diam}(D)^\alpha \cdot [u]_{L^{p,\lambda}(D,\mathbb{R}^N)}\} .$$

Man findet den Beweis dieses Einbettungssatzes in [7], Thm. 1.2, p. 72. In § 7 benötigen wir

Lemma 0.4: Gehring-Lemma ([7], Prop. 1.1, p. 124)

Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein achsenparalleler Würfel. r,q seien aus $\mathbb{R}$ mit $r > q > 1$, $f \in L^r(Q)$, $g \in L^q(Q)$ seien nicht-negativ und

sollen die umgekehrte Hölder-Ungleichung

$$\fint_{Q_R(x_o)} g^q\,dx \le b\Big(\fint_{Q_{2R}(x_o)} g\,dx\Big)^{1/q} + \fint_{Q_{2R}(x_o)} f^q\,dx + \theta \fint_{Q_{2R}(x_o)} g^q\,dx$$

für alle $x_o \in Q$ und $R < \min(\frac{1}{2}\operatorname{dist}(x_o,\partial Q), R_o)$ erfüllen ($Q_R(x_o) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i - x_{oi}| < R \text{ für } i = 1,..,n\}$), wo R_o, b, θ Konstanten sind mit $b > 1$, $R_o > 0$, $0 \le \theta < 1$. Dann gibt es $C, \varepsilon > 0$ nur abhängig von b, θ, q, n und r mit $g \in L^p_{loc}(Q)$ für alle $p \in [q, q+\varepsilon[$, und für $Q_{2R}(x_o) \subset Q$ mit $R < R_o$ gilt die Abschätzung

$$\Big(\fint_{Q_R(x_o)} g^p dx\Big)^{1/p} \le C\Big\{\Big(\fint_{Q_{2R}(x_o)} g^q dx\Big)^{1/q} + \Big(\fint_{Q_{2R}(x_o)} f^p dx\Big)^{1/p}\Big\}$$

Im ersten Teil der Arbeit benötigen wir neben den vorhin eingeführten Funktionenräumen spezielle Klassen von Distributionen: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, für $2 \le p < \infty$ sei $p' := \frac{p}{p-1}$. Auf $\overset{\circ}{H}{}^{1,p'}(\Omega)$ betrachten wir die nach Lemma 0.2 zur Standardnorm $\|\cdot\|_{H^{1,p'}(\Omega)}$ aequivalente Norm

$$|||u|||_{\overset{\circ}{H}{}^{1,p'}(\Omega)} := \|\nabla u\|_{L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^n)}$$

Sei $T \in \overset{\circ}{H}{}^{1,p'}(\Omega)^*$, also ein bzgl. $|||\cdot|||_{\overset{\circ}{H}{}^{1,p'}(\Omega)}$ stetiges lineares Funktional $\overset{\circ}{H}{}^{1,p'}(\Omega) \to \mathbb{R}$, mit der Norm

$|||T|||_* := \sup\{Tu : u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,p'}(\Omega), |||u|||_{\overset{\circ}{H}{}^{1,p'}(\Omega)} \le 1\}$. Bekanntlich gibt es Funktionen $v \in L^p(\Omega), F \in L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)$ mit

$$(*)\quad T\eta = \int_\Omega v\,\eta\,dx + \int_\Omega F\cdot\nabla\eta\,dx \quad \text{für alle } \eta \in \overset{\circ}{H}{}^{1,p'}(\Omega)$$

(man gewinnt v und F aus dem Rieszschen Darstellungssatz für $L^{p'}(\Omega)$). $H^{-1,p}(\Omega)$ bezeichne nun den Raum aller Distributionen $S : C^\infty_{kpt}(\Omega) \to \mathbb{R}$, die sich in der Form $(*)$ mit L^p-Funktionen

$v : \Omega \to \mathbb{R}$, $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ schreiben lassen. Da $C^\infty_{kpt}(\Omega)$ dicht in $\overset{\circ}{H}{}^{1,p'}(\Omega)$, liefert $S \in H^{-1,p}(\Omega)$ durch stetiges Fortsetzen ein eindeutig bestimmtes Element von $\overset{\circ}{H}{}^{1,p'}(\Omega)^*$, und durch Einschränken von $T \in \overset{\circ}{H}{}^{1,p'}(\Omega)^*$ auf $C^\infty_{kpt}(\Omega)$ wird umgekehrt eine Distribution aus $H^{-1,p}(\Omega)$ definiert. In diesem Sinn können wir $\overset{\circ}{H}{}^{1,p'}(\Omega)^*$ und $H^{-1,p}(\Omega)$ als Mengen identifizieren. Sei jetzt $T \in H^{-1,p}(\Omega)$ mit der Darstellung (*). Da $p \geq 2$ vorausgesetzt wird, hat das Dirichlet-Problem

$$\begin{cases} -\Delta h := -\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} h = v & \text{auf } \Omega \\ h \mid \partial\Omega \equiv 0 \end{cases}$$

genau eine schwache Lösung $h \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega)$, d.h. es gibt genau eine Funktion $h \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega)$ mit $\int_\Omega \nabla h \cdot \nabla \eta \, dx = \int_\Omega v \eta dx$ für alle $\eta \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega)$. Nach [18], Thm. 5.5.4', gilt $\nabla h \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$, so daß man

$$T\eta = \int_\Omega (F + \nabla h) \cdot \nabla \eta \, dx \quad \text{für alle } \eta \in \overset{\circ}{H}{}^{1,p'}(\Omega)$$

erhält; T hat also auch die Darstellung

$$(**) \quad T\eta = \int_\Omega X \cdot \nabla \eta \, dx \quad \text{für alle } \eta \in \overset{\circ}{H}{}^{1,p'}(\Omega)$$

mit einem geeigneten Vektorfeld $X \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Definiert man jetzt noch für $T \in H^{-1,p}(\Omega)$

$$\|T\|_{-1,p} := \inf\{\|X\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)} : X \text{ erfüllt } (**)\},$$

so gilt:

Lemma 0.5: $(H^{-1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{-1,p})$ ist durch die oben beschriebene kanonische Abbildung isometrisch isomorph zu $(\overset{\circ}{H}{}^{1,p'}(\Omega)^*, |||\cdot|||_*)$.

Beweis: Sei $T \in H^{-1,p}(\Omega)$. Zu zeigen ist noch $\|T\|_{-1,p} = |||T|||_*$.

Dazu sei $X \in L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)$ mit (**). Die Hölder-Ungleichung ergibt sofort $|||T|||_* \le \|X\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)}$, also $|||T|||_* \le \|T\|_{-1,p}$ nach Übergang zum Infimum über die T darstellenden Vektorfelder X. Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung beachte man, daß $\overset{\circ}{H}{}^{1,p'}(\Omega) \ni \eta \to \nabla\eta \in L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ nach Wahl der Norm $|||\cdot|||_{\overset{\circ}{H}{}^{1,p'}(\Omega)}$ eine Isometrie ist, nach dem Satz von Hahn-Banach (vgl. [12]) gibt es eine Fortsetzung $\tilde{T} : L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ von $T : \overset{\circ}{H}{}^{1,p'}(\Omega) \to \mathbb{R}$ mit $\|\tilde{T}\| = |||T|||_*$. Schließlich findet man nach dem Rieszschen Darstellungssatz in $L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ genau ein $Y \in L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)$ mit $\tilde{T}u = \int_\Omega u\cdot Y\,dx$ für alle $u \in L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ und $\|\tilde{T}\| = \|Y\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)}$, insbesondere erfüllt Y die Darstellungsformel (**), aus $|||T|||_* = \|Y\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)} \ge \|T\|_{-1,p}$ folgt die Behauptung.

QED

Ist nun $N \ge 1$, so definiert man $H^{-1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ analog als den Raum aller Distributionen $T : C^\infty_{kpt}(\Omega,\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$, zu denen es $F \in L^p(\Omega,\mathbb{R}^{nN})$, $F = (F^i_\alpha)_{\substack{1\le i\le N\\ 1\le\alpha\le n}}$, gibt mit $T\eta = \sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{n}\int_\Omega F^i_\alpha\, D_\alpha\,\eta^i dx$ für alle $\eta \in C^\infty_{kpt}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, $\|\cdot\|_{-1,p}$ wird entsprechend erklärt. Dann gilt Lemma 0.5 unverändert, speziell folgt die Isomorphie

$$H^{-1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)^* \cong \overset{\circ}{H}{}^{1,p'}(\Omega,\mathbb{R}^N),$$

denn der Raum $\overset{\circ}{H}{}^{1,p'}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ ist reflexiv. Die stetigen linearen Funktionale $\varphi : H^{-1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ entsprechen also genau den Sobolev-Funktionen $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,p'}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ durch

$$\varphi(T) = Tu \qquad \forall\, T \in H^{-1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N).$$

Beim Beweis vieler Aussagen der folgenden Paragraphen spielen

Potentialoperatoren eine große Rolle, insbesondere was ihre Abbildungseigenschaften von Lebesgue-Räumen in Sobolev-Räume betrifft. Unter einem Potentialoperator verstehen wir eine Abbildung, die Funktionen aus einer bestimmten Klasse ihr Faltungsprodukt mit einem Kern zuordnet. Wir beginnen mit einem einfachen Satz über Faltungen.

Lemma 0.6: ([1], Thm. 4.30)

Seien $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $v \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für ein $1 \le p < \infty$. Dann sind die Faltungen $u * v(x) := \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y)dy$, $v * u(x) := \int_{\mathbb{R}^n} v(x-y)u(y)dy$ wohldefiniert und stimmen für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ überein. Ferner gilt: $u * v \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|u * v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} .$$

Wir definieren den uns interessierenden Typ von singulären Kernen:

Definition: $\varphi: \mathbb{R}^n - \{o\} \to \mathbb{R}$ heißt wesentlich homogen vom Grad $s \in \mathbb{R}$ (i) für $s < o$: wenn φ homogen vom Grad s ist

(ii) für $s \ge o$: wenn $s \in \mathbb{Z}$ ist, und φ die Form

$$\varphi(y) = \varphi_o(y) \log |y| + \varphi_1(y) , \quad y \in \mathbb{R}^n - \{o\},$$

hat mit einem vom Grad s homogenen Polynom φ_o und einer vom Grad s homogenen Funktion φ_1.

Ist $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n - \{o\}, \mathbb{R})$, so zeigt eine einfache Rechnung, daß jede partielle Ableitung von φ wesentlich homogen vom Grad $s - 1$ ist. Die Hauptaussagen über Potentialoperatoren mit wesentlich homogenen Kernen sind enthalten in

Lemma O.7: ([18], Thm. 3.4.2)

Sei $m \in \mathbb{N}$. $K : \mathbb{R}^n - \{o\} \to \mathbb{R}$ sei $(m+1)$-mal stetig differenzierbar und wesentlich homogen vom Grad $m-n$. Ist $1 < p < \infty$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger, so liegt $u := K * f : x \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)dy$ im Sobolev-Raum $H^{m,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Für die schwachen partiellen Ableitungen $D^\nu u$ von u gelten für alle Multiindices $\nu \in \mathbb{N}_o^n$, $|\nu| \le m$, fast überall folgende Formeln:

$$D^\nu u(x) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} (D^\nu K)(x-y)f(y)dy, & \text{wenn } o \le |\nu| \le m-1 \\ c_\nu f(x) + \lim\limits_{\rho \downarrow o} \int_{\mathbb{R}^n - B_\rho(x)} (D^\nu K)(x-y)f(y)dy, & \text{wenn } |\nu| = m \end{cases}$$

Hierbei ist $c_\nu := - \int_{\partial B_1(o)} D^\kappa K(-\eta) \cdot \eta_\mu dH^{n-1}(\eta)$ mit irgendwelchen Multiindices $\kappa, \mu \in \mathbb{N}_o^n$, die $\nu = \kappa + \mu$, $|\mu| = 1$, erfüllen. $\square$

Wichtig für die Anwendungen sind folgende L^p-Abschätzungen der schwachen Ableitungen von u.

Korollar: Unter den Voraussetzungen von Lemma O.7 sei $f \equiv o$ fast überall auf $\mathbb{R}^n - B_R(o)$ für ein $R > o$. Dann gilt für alle Multiindices $\nu \in \mathbb{N}_o^n$ mit $m - n < |\nu| \le m$ die Abschätzung

$$R^{|\nu|-m} \cdot \|D^\nu u\|_{L^p(B_R(o))} \le C_\nu \|f\|_{L^p(B_R(o))} .$$

C_ν hängt nur ab von n, m, p, ν und $\sup\limits_{\partial B_1(o)} |D^\nu K|$ für $\nu \in \mathbb{N}_o^n$ mit $|\nu| \le m-1$, für $|\nu| = m$ geht zusätzlich noch $\sup\limits_{\partial B_1(o)} |\nabla D^\nu K|$ in die Konstante ein.

Bemerkung: In [18], Thm. 3.4.2(b), findet man eine Abschätzung der Form

$$(*)\quad \|D^\nu u\|_{L^p(B_R(o))} \le \text{const}_\nu(R)\cdot\|f\|_{L^p(B_R(o))} \quad \text{für } \nu\in\mathbb{N}_o^n,\ |\nu|\le m,$$

wo $\text{const}_\nu(R)$ auch von n,m,p und K abhängt. Aus Homogenitätsgründen folgt mit den Ableitungsformeln die Beziehung

$$R^{|\nu|-m}\,\|D^\nu u\|_{L^p(B_R(o))} \le \text{const}_\nu(1)\cdot\|f\|_{L^p(B_R(o))} \quad \text{für } m-n<|\nu|\le m,$$

allerdings ist noch nicht klar, wie K in die Konstante eingeht. Um das zu sehen, geben wir den

Beweis des Korollars: a) Sei $\nu\in\mathbb{N}_o^n$, $m-n<|\nu|<m$. $D^\nu K$ ist homogen vom Grad $m-n-|\nu| =: -s$ mit $0<s<n$, d.h. es gilt

$$D^\nu K(y) = D^\nu K(y/|y|)\cdot|y|^{-s} \quad \text{für alle } y\in\mathbb{R}^n-\{o\}.$$

Setzen wir $g(y) := \begin{cases} |y|^{-s} & \text{auf } B_{2R}(o) \\ o & \text{sonst} \end{cases}$ und $\tilde f(y) := \begin{cases} f(y) & \text{auf } B_R(o) \\ o & \text{sonst} \end{cases}$

so ist $|D^\nu u(x)| \le \sup_{\partial B_1(o)} |D^\nu K|\cdot|(g*\tilde f)|(x)$, und Lemma 0.6 ergibt

$$\|D^\nu u\|_{L^p(B_R(o))} \le \sup_{\partial B_1(o)} |D^\nu K|\cdot\|f\|_{L^p(B_R(o))}\cdot\int_{B_{2R}(o)}|y|^{-s}\,dy$$

Das Integral rechts liefert gerade die Potenz $R^{n-s} = R^{m-|\nu|}$

b) Sei nun $|\nu| = m$. Man wähle eine Folge $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $C^\infty_{kpt}(B_R(o))$ mit $f_i \xrightarrow{i\to\infty} f$ in $L^p(B_R(o))$. Nach Lemma 0.7 ist das Potential u_i von f_i aus $H^{m,p}(B_R(o))$ und erfüllt nach (*)

$u_i \xrightarrow[i\to\infty]{} u$ in $H^{m,p}(B_R(o))$, speziell: $D^\nu u_i \xrightarrow[i\to\infty]{} D^\nu u$ in $L^p(B_R(o))$

Es gilt die Ableitungsformel

$$D^\nu u^i(x) = c_\nu\ f_i(x) + \lim_{\rho \downarrow o} \int_{\mathbb{R}^n - B_\rho(x)} (D^\nu K)(x-y) f_i(y)\,dy =: c_\nu f_i(x) + g_i(x),$$

und nach der Calderon-Zygmund Abschätzung aus [18], Thm. 2.7.5, folgt: $\|g_i\|_{L^p(B_R(o))} \le C_\nu \|f_i\|_{L^p(B_R(o))}$ mit C_ν wie im Korollar.

Dies ergibt ersichtlich die L^p-Abschätzung für $D^\nu u$.

QED

In § 4 benötigen wir

Lemma 0.8: ([18], Thm. 2.6.5)

$K : \mathbb{R}^n - \{o\} \to \mathbb{R}$ erfülle die nachstehenden Bedingungen

(i) K ist homogen vom Grad $-n$

a) (ii) $K \in C^1(\mathbb{R}^n - \{o\})$ b) $K(-y) = K(y)$ für alle $y \neq o$

(iii) $\int_{\partial B_1(o)} K(y)\,dH^{n-1}y = o$

Dann gilt für alle $x_o, x_1 \in \mathbb{R}^n$ und $o < \rho < a$ mit $|x_1 - x_o| < a - \rho$:

$\int_{B_a(x_o) - B_\rho(x_1)} K(x-y)\,dy = o$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x - x_1| < \rho$,

und für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x - x_o| < a$ und $1 \le \alpha \le n$ ist

$\int_{\partial B_a(x_o)} K(x-y) \cdot (y_\alpha - x_{o\alpha})\,dH^{n-1}(y) = o.$

□

Lemma 0.9: Sind $o < \tau, \sigma < n$ reelle Zahlen mit $\sigma + \tau > n$, so gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x-z|^{-\sigma} |y-z|^{-\tau}\,dz \le C(n,\tau,\sigma)\,|x-y|^{n-\sigma-\tau}$$

Die Konstante C kann man in der Form

$C(n)\cdot\max\left(\frac{1}{n-\sigma}, \frac{1}{n-\tau}, \frac{1}{\sigma+\tau-n}\right)$ wählen.

Zum Beweis dieser Abschätzung verfährt man wie folgt: Bei festem $x \neq y$ aus $\mathbb{R}^n$ zerlege man den Integrationsbereich in der Form $\mathbb{R}^n = B_{\frac{1}{2}|x-y|}(x) \cup B_{\frac{1}{2}|x-y|}(y) \cup D$, wo D das Restgebiet bezeichnet. Dann schätze man den Integranden folgendermaßen ab:

auf D: $|x-z|^{-\sigma}\cdot|y-z|^{-\tau} \leq 3^{\tau}|x-z|^{-\sigma-\tau}$ (benutze dann $\int_D \ldots dz \leq \int_{\mathbb{R}^n - B_{\frac{1}{2}|x-y|}(x)} \ldots dz$)

auf $B_{\frac{1}{2}|x-y|}(x)$: $|x-z|^{-\sigma}\cdot|y-z|^{-\tau} \leq 2^{\tau}|x-y|^{-\tau}\cdot|x-z|^{-\sigma}$

auf $B_{\frac{1}{2}|x-y|}(y)$: $|x-z|^{-\sigma}|y-z|^{-\tau} \leq 2^{\sigma}|x-y|^{-\sigma}\cdot|y-z|^{-\tau}$

Nach Integration dieser Ungleichungen folgt die Behauptung. $\square$

Wir schließen mit einem technischen Hilfssatz, dem sogenannten Lemma zur Campanato-Methode.

Lemma 0.10: ([7], Lemma 2.1, p. 87)

Sei $\varphi : [0,\infty[\to [0,\infty[$ monoton wachsend. Es gelte für alle $0 \leq \rho \leq R \leq R_0$ die Abschätzung $\varphi(\rho) \leq A[(\frac{\rho}{R})^{\alpha} + \varepsilon]\cdot\varphi(R) + B R^{\beta}$ mit nicht-negativen Konstanten $A,B,\varepsilon,\alpha > \beta$, wobei der Parameter ε kleiner sein muß als eine gewisse durch α,β,A bestimmte positive Konstante $\varepsilon_0(\alpha,\beta,A)$. Dann gibt es eine Konstante $C = C(\alpha,\beta,A)$, so daß für alle $0 \leq \rho \leq R \leq R_0$ die Ungleichung $\varphi(\rho) \leq C\rho^{\beta}\left[\frac{\varphi(R)}{R^{\beta}} + B\right]$ erfüllt ist.

Wir vereinbaren für die folgenden Paragraphen einige Generalvoraussetzungen (GV):

(GV)I: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, $n \geq 2$.

(GV)II: $N \in \mathbb{N}$ sei fixiert; für $i,j = 1,..,N$, $\alpha,\beta = 1,..,n$ seien $A^{ij}_{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega)$. Wir definieren folgende $(N \times N)$-Matrizen von Differentialoperatoren zweiter Ordnung

$$(L_{ij})_{1\leq i,j\leq N} := (-D_\alpha(A^{ij}_{\alpha\beta}D_\beta))_{1\leq i,j\leq N}, (L^t_{ij})_{1\leq i,j\leq N} := (-D_\alpha(A^{ji}_{\beta\alpha}D_\beta))_{1\leq i,j\leq N},$$

also: $L_{ij}u^j = -D_\alpha(A^{ij}_{\alpha\beta}D_\beta u^j)$, $L^t_{ij}u^j = -D_\alpha(A^{ji}_{\beta\alpha}D_\beta u^j)$, $i = 1,..,N$,

für Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$.

Wir benutzen hier und nachfolgend die Einsteinsche Summationskonvention: Über doppelt auftretende lateinische bzw. griechische Indices wird von 1 bis N bzw. 1 bis n summiert.

(GV)III: λ und Λ seien positive reelle Zahlen mit

$\sup\{\|A^{ij}_{\alpha\beta}\|_{L^\infty(\Omega)}; i,j = 1,..,N, \alpha,\beta = 1,..,n\} \leq \Lambda$ und

$$A^{ij}_{\alpha\beta}(x)\xi^i_\alpha\xi^j_\beta \geq \lambda|\xi|^2 \quad \text{für alle } x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^{nN}.$$

Die letzte Ungleichung bedeutet (sehr starke) Elliptizität der Differentialoperator-Matrix $(L_{ij})_{1\leq i,j\leq N}$. Da wir nachfolgend hauptsächlich den Fall linearer elliptischer Systeme mit stetigen Koeffizienten betrachten, könnten wir an einigen Stellen die schwächere Legendre-Hadamard-Bedingung voraussetzen (z.B. gelten Satz 1 und Satz 2 dann unverändert); andererseits benötigen wir mehrfach entscheidend die strikte positive Definitheit der mit der Differentialoperator-Matrix $(L_{ij})_{1\leq i,j\leq N}$ assoziierten Bilinearform B auf dem Sobolev-Raum $\overset{o}{H}{}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ (vgl. die folgende Definition), was durch die

Legendre-Hadamard-Bedingung nicht garantiert wird. Zur Vereinheitlichung der Terminologie beschränken wir uns daher auf die in (GV)III gewählte Form. Zum Abschluß dieses Paragraphen definieren wir das Konzept der schwachen Lösung unter den Voraussetzungen (GV):

Definition: Seien $f:=(f^i)_{1\le i\le N} \in L^1_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^N)$,

$$F := (F^i_\alpha)_{\substack{1\le i\le N\\ 1\le \alpha\le n}} \in L^1_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^{nN}) .$$

$u:=(u^i)_{1\le i\le N} \in H^{1,1}_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ heißt eine schwache Lösung des linearen Systems zweiter Ordnung

$L_{ij}u^j = f^i - D_\alpha F^i_\alpha$, $i = 1,..,N$, auf Ω, falls für alle $\phi \in C^\infty_{kpt}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ folgende Integralrelation gilt:

$$B(\phi,u) := \int_\Omega A^{ij}_{\alpha\beta} D_\alpha \phi^i D_\beta u^j dx = \int_\Omega f^i\phi^i dx + \int_\Omega F^i_\alpha D_\alpha \phi^i dx$$

Für das transponierte System $L^t_{ij}u^j = f^i - D_\alpha F^i_\alpha$, $i=1,..,N$, ist die Definition entsprechend zu modifizieren.

Bekanntlich ist jede klassische Lösung des Systems auch eine schwache Lösung; die Umkehrung gilt, wenn u,f,F und die Koeffizienten $A^{ij}_{\alpha\beta}$ genügend glatt sind.

Für die Beweise der Sätze in den anschließenden Paragraphen verabreden wir folgende Konvention: Alle Konstanten, die im Verlauf des Beweises auftreten, und die nur von den im Satz aufgezählten Parametern abhängen, werden mit demselben Symbol C bezeichnet. Ansonsten benutzen wir die Schreibweise C(...) für positive Konstanten, die von den in Klammern stehenden Parametern bestimmt werden.

§ 1 A priori Abschätzungen für schwache Lösungen linearer Systeme mit stetigen Koeffizienten

In diesem Paragraphen betrachten wir das lineare System zweiter Ordnung

(1.1) $L_{ij}\, u^j = f^i - D_\alpha F^i_\alpha$ auf Ω, $i = 1,\dots,N$

für Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$ unter den folgenden für den ganzen Abschnitt gültigen Voraussetzungen

(1.2) (GV) mit $n \geq 3$ und $A^{ij}_{\alpha\beta} \in C^0(\bar{\Omega})$ für $i,j = 1,\dots,N$, $\alpha,\beta = 1,..,n$

mit dem Ziel, Regularitätsaussagen von dem auf Seite 8 genannten Typ für schwache Lösungen zu beweisen. Wie wir am Ende sehen werden, bleiben einige Ergebnisse auch dann gültig, wenn man die Stetigkeitsbedingung dadurch ersetzt, daß die Koeffizienten "nur wenig" von Konstanten abweichen, d.h. wenn

$\sup_{\substack{i,j=1,..,N \\ \alpha,\beta=1,..,n}} \|A^{ij}_{\alpha\beta} - a^{ij}_{\alpha\beta}\|_{L^\infty(\Omega)} < \varepsilon$ gilt mit $a^{ij}_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$, die die Elliptizitätsbedingung aus (GV)III erfüllen; ε wird dabei durch Systemparameter bestimmt. Wir werden dies in § 6 benutzen, um neue Beweise für bekannte Sätze über das Verhalten schwacher Lösungen elliptischer Systeme mit meßbaren Koeffizienten anzugeben.

Die Voraussetzung, daß die Raumdimension n mindestens 3 sein soll, hat technische Gründe und vermeidet die sonst nötige Fallunterscheidung $n \geq 3$ und $n = 2$.

Wir beginnen mit dem folgenden fundamentalen Regularitätssatz ([18], Thm. 6.4.8)

Satz 1: Sei $u \in H^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ für ein $1 < p < \infty$ schwache Lösung von (1.1) unter den Voraussetzungen (1.2) mit Funktionen $F \in L^q(\Omega,\mathbb{R}^{nN})$, $f \in L^q(\Omega,\mathbb{R}^N)$ für ein $1 < q < \infty$. Ferner sei

$\varphi \in H^{1,q}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ mit $u-\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$. Dann liegt u im Sobolev-Raum $H^{1,q}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ mit der a priori Abschätzung

(1.3) $$\|u\|_{H^{1,q}(\Omega,\mathbb{R}^N)} \le C\{\|F\|_{L^q(\Omega,\mathbb{R}^{nN})}+\|f\|_{L^q(\Omega,\mathbb{R}^N)}+\|\varphi\|_{H^{1,q}(\Omega,\mathbb{R}^N)}+\|u\|_{L^1(\Omega,\mathbb{R}^N)}\}$$

Die Konstante C hängt ab von $n,N,\lambda,\Lambda,p,q\,\Omega$ und dem Stetigkeitsmodul der Koeffizienten.

Bemerkung: Erfüllen die Koeffizienten z.B. eine α-Hölder-Bedingung auf $\bar{\Omega}$ mit Hölder-Konstante L, so gehen in die Konstante C die Größen λ,Λ,α und L als von den Koeffizienten herrührende Parameter ein. Die Abhängigkeit von Ω besteht darin, daß die Konstante bestimmt wird vom Durchmesser des beschränkten Lipschitz-Gebietes Ω und auch von der Beschaffenheit des Randes $\partial\Omega$, also von Art und Anzahl der Lipschitz-Funktionen $\mathbb{R}^{n-1}\supset U$ (offen) $\to \mathbb{R}$, deren Graph lokal $\partial\Omega$ ergibt.

Satz 1 besagt, daß der Gradient der betrachteten schwachen Lösung u, der a priori nur in einer Lebesgue-Klasse $L^p(\Omega,\mathbb{R}^{nN})$ mit "kleinem Exponent" p liegt, stets doch zu einer solchen Potenz integrierbar ist, wie es die rechte Seite von (1.1) und die Randdaten φ erlauben. Als unmittelbare Folgerung erhalten wir mit der Sobolev-Einbettung aus Lemma 0.1(v) den zur Konstruktion der Green-Matrix nötigen Regularitätssatz.

Korollar 1: Seien $F\in L^p(\Omega,\mathbb{R}^{nN})$, $f\in L^p(\Omega,\mathbb{R}^N)$ für ein $n<p<\infty$. $u\in \overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ sei die eindeutige Lösung von (1.1) unter der Voraussetzung (1.2). Dann ist $u\in C^0(\bar{\Omega},\mathbb{R}^N)$, und mit

einer Konstanten C, die abhängt von n,N,λ,Λ,p,Ω und dem Stetigkeitsmodul der Koeffizienten, gilt folgende Abschätzung:

(1.4) $\|u\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^N)} \le C\{\|f\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^N)} + \|F\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^{nN})}\}$

Anmerkungen: 1) Da $p > 2$ ist, folgen Existenz und Eindeutigkeit der schwachen Lösung u im Hilbert-Raum $\overset{o}{H}{}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ aus dem Lax-Milgram-Theorem ([8], Thm. 5.8), denn nach (GV)III ist $B(\varphi,\psi) := \int_\Omega A^{ij}_{\alpha\beta} D_\alpha\varphi^i D_\beta\psi^j dx$ eine stetige, koerzive Bilinearform auf $\overset{o}{H}{}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)$. Nach dem Satz gilt dann sogar $u \in H^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, (1.3) und Lemma (0.1) (v) ergeben die Abschätzung (1.4), allerdings noch mit dem Zusatzterm $\|u\|_{L^1(\Omega,\mathbb{R}^N)}$ rechts, den man durch $\|f\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^N)}$ und $\|F\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^{nN})}$ nach oben abschätzen möchte. Dazu beachte man (Approximationsschluß), daß man in die schwache Form des Systems (1.1) unter den Voraussetzungen des Korollars auch u als Testvektor einsetzen darf, Standardargumente ergeben mit Lemma 0.2 dann eine Abschätzung von $\|u\|_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^N)}$ nach oben durch L^2-Normen von f und F. Mit der Hölder-Ungleichung erhält man daraus die gewünschte Beziehung.

2) Einen direkten Beweis von Korollar 1 liefert die Campanato-Methode (vgl. [4], [7]): Für $p > n$ ist $L^p(\Omega)$ stetig eingebettet in den Morrey-Raum $\mathfrak{L}^{2,\beta}(\Omega)$ mit $\beta := n(1-\frac{2}{p})$ (Hölder-Ungleichung), und Campanato's Argumente zeigen unter den Voraussetzungen von Korollar 1, daß ∇u im Morrey-Raum $\mathfrak{L}^{2,\beta}(\Omega,\mathbb{R}^{nN})$ liegt, was Stetigkeit von u auf $\overline{\Omega}$ impliziert. In dieser Form findet man Korollar 1 bei Cannarsa ([5], Thm. 1.I). Die Campanato-Technik liefert jedoch nur Ergebnisse auf dem Niveau der Morrey-Räume dergestalt, daß die Abbildung $T : \mathfrak{L}^{2,\beta}(\Omega,\mathbb{R}^{nN}) \to \mathfrak{L}^{2,\beta}(\Omega,\mathbb{R}^{nN})$, die F aus diesem

Raum den Gradienten der $\overset{o}{H}{}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)$-Lösung von (1.1) mit rechter Seite $-D_\alpha F^i_\alpha$ zuordnet, ein stetiger linearer Operator ist. Analoge Aussagen für die Lebesgue-Klassen lassen sich auf diesem Weg nicht erzielen.

Eine weitere Folgerung aus Satz 1 ist nachstehende Eindeutigkeitsaussage.

Korollar 2: Sei $u \in \overset{o}{H}{}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ für ein $1 < p \leq \infty$ schwache Lösung des homogenen Systems (1.1) unter den Voraussetzungen (1.2). Dann ist u die Nullfunktion.

Der Satz ergibt $u \in H^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, also $u \in \overset{o}{H}{}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ nach [18], Thm. 3.6.2. Nun benutze man die Elliptizitätsbedingung (GV)III, um $u = o$ zu schließen. Wir bemerken, daß Korollar 2 bei nur meßbaren und beschränkten Koeffizienten falsch ist, das zeigen die Gegenbeispiele von Serrin [19].

Der Beweis von Satz 1 zerfällt in zwei Teile, nämlich den Nachweis der inneren Regularität und Randabschätzungen. Aus verschiedenen Gründen geben wir nur eine Darstellung der lokalen "L^p-Theorie": einerseits sind die Randabschätzungen komplizierter Natur, und man kann sie vollständig bei Morrey ([18], Chapter VI), Agmon/Douglis/Nirenberg ([2]) oder Solonnikov ([20]) finden. Andererseits sind die lokalen Ergebnisse bei Morrey nur skizziert, so daß wir die für unsere Zwecke benötigten Aussagen selbst formulieren und beweisen. Überdies machen wir später fortlaufend Gebrauch von den hier eingeführten Bezeichnungen und der genauen Form der Abschätzungen.

Zum Beweis der lokalen Version von Satz 1 geht man folgenden Weg:

Zunächst betrachtet man den Fall konstanter Koeffizienten $A^{ij}_{\alpha\beta}(x_o), i,j = 1,\dots,N, \alpha,\beta = 1,\dots,n$ für einen Punkt $x_o \in \Omega$. Für den zugehörigen Differentialoperator (mit konstanten Koeffizienten)

$$L_{x_o ij} u^j := -D_\alpha (A^{ij}_{\alpha\beta}(x_o) D_\beta u^j), \qquad i = 1,\dots,N$$

ist eine Fundamentalmatrix $(E^j_k)_{\substack{1\le j\le N \\ 1\le k\le N}}$ bekannt, mit deren Hilfe man eine spezielle Lösung $\bar{u} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ des Systems

$$L_{x_o ij} \bar{u}^j = f^i - D_\alpha F^i_\alpha , \quad i = 1,\dots,N \quad \text{in der Form}$$

$$\bar{u}^k(x) = E^j_k * f^j\ (x) - (\frac{\partial}{\partial z_\alpha} E^j_k) * F^j_\alpha\ (x) , \quad k = 1,\dots,N,$$

aufschreiben kann (vgl. Lemma 1.4). An der Gestalt der rechts stehenden Potentiale liest man ab, daß $\nabla\bar{u}$ in derselben Lebesgue-Klasse liegt wie die Funktionen f und F. Da die Leitkoeffizienten stetig sind, gelingt es durch ein Störungsargument unter Zuhilfenahme eines Eindeutigkeitssatzes die vorgelegte Lösung von (1.1) lokal bei x_o mit $\bar{u}$ zu vergleichen und daraus die behauptete Regularität von ∇u im Inneren von Ω zu beweisen.

Wir fixieren die folgenden

Notationen: Sei $x_o \in \Omega$ fest, für $i,j = 1,\dots,N$ setzen wir

$$L_{x_o ij} := -A^{ij}_{\alpha\beta}(x_o) D_\alpha D_\beta$$

$$L_{x_o ij}(\xi) := -A^{ij}_{\alpha\beta}(x_o)\xi_\alpha \xi_\beta , \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

$$L_{x_o}(\xi) := \det(L_{x_o ij}(\xi))_{1\le i,j\le N} \text{ und}$$

$$L^{ji}_{x_o}(\xi) := \text{Kofaktor von } L_{x_o ij}(\xi), \ \xi \in \mathbb{R}^n$$

$L_{x_o ij}(\xi)$ bzw. $L_{x_o}(\xi)$ bzw. $L^{ji}_{x_o}(\xi)$ sind homogene Polynome vom Grad 2 bzw. 2N bzw. 2N - 2. Man erhält $L^{ji}_{x_o}(\xi)$ per Definition als Determinante der (N - 1)x(N - 1) Matrix versehen mit dem Vorzeichenfaktor $(-1)^{i+j}$, die aus $(L_{x_o ij}(\xi))_{1\le i,j\le N}$ durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht. Es gilt dann

(1.5) $L_{x_o ij}(\xi)\cdot L^{jk}_{x_o}(\xi) = \delta^k_i \cdot L_{x_o}(\xi)$, $i,k = 1,\dots,N$,

$\delta^k_i := \begin{cases} 1 \text{ für } i = k \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$. Mit $L_{x_o}(D)$ bzw. $L^{ji}_{x_o}(D)$ bezeichnen wir die Differentialoperatoren der Ordnung 2N bzw. 2N - 2, die man aus den Polynomen $L_{x_o}(\xi)$ bzw. $L^{ji}_{x_o}(\xi)$ durch Ersetzung "$\xi_\alpha \to D_\alpha$" erhält. Schließlich sei K_{x_o} die durch Fourier-Transformation gewonnene Fundamentallösung zum Operator $L_{x_o}(D)$, d.h. $K_{x_o} : \mathbb{R}^n - \{o\} \to \mathbb{R}$ erfüllt $L_{x_o}(D)K_{x_o} = \delta_o$ (Dirac-Maß in $o \in \mathbb{R}^n$) im Distributionssinn. Explizite Formeln für K_{x_o} findet man bei Morrey ([18], p. 216/217) oder John ([13], p. 69/70). Wir kommen mit folgenden Informationen aus.

Lemma 1.1: Unter den Voraussetzungen (1.2) ist K_{x_o} eine analytische Funktion auf $\mathbb{R}^n - \{x_o\}$, wesentlich homogen vom Grad 2N - n, und für alle Multiindices $\nu \in \mathbb{N}^n_o$ mit $|\nu| > 2N - n$ gilt

(1.6) $|D^\nu K_{x_o}(y)| \le C(n,N,\lambda,\Lambda,|\nu|)\cdot|y|^{2N-n-|\nu|}$ für alle $y \in \mathbb{R}^n - \{o\}$. Überdies ist K_{x_o} eine gerade Funktion, also $K_{x_o}(-y) = K_{x_o}(y)$, und erfüllt $L_{x_o}(D)K_{x_o} = \delta_o$ im Distributionssinn.

Für den Beweis des Lemmas verweisen wir auf o.g. Quellen. Wichtig für unsere Zwecke ist die Unabhängigkeit der Konstanten C in (1.6) vom betrachteten Punkt x_o, wir nehmen deshalb nachfolgend stets $x_o = o$ an (also $o \in \Omega$) und schreiben dann einfach $K, L_{oij}(D) \ldots$ für $K_{x_o}, L_{x_o ij}(D) \ldots$.

Lemma 1.2: a) Für $R > o$ und meßbare Funktionen $f : B_R(o) \to \mathbb{R}$ sei unter den Voraussetzungen (1.2)

$$(Q_R f)(x) := \int_{B_R(o)} K(x-y) f(y)\,dy, \quad x \in B_R(o).$$

Der Potentialoperator Q_R hat folgende Eigenschaften:

(i) $Q_R : L^p(B_R(o)) \to H^{2N,p}(B_R(o))$ ist für alle $1 < p < \infty$ stetig.

Für alle $1 < p < \infty$ und $f \in L^p(B_R(o))$ gelten die Aussagen

(ii) $D^\nu (Q_R f)(x) = \int_{B_R} (D^\nu K)(x-y) f(y)\,dy$, $x \in B_R(o)$, $\nu \in \mathbb{N}_o^n$ mit $|\nu| < 2N$

(iii) $^*\|D^\nu (Q_R f)\|_{H^{2,p}(B_R(o))} \le C(n,N,\lambda,\Lambda,p)\,\|f\|_{L^p(B_R(o))}$ für $\nu \in \mathbb{N}_o^n$ mit $|\nu| = 2N-2$.

(iv) $L_o(D)(Q_R f) = f$ fast überall auf $B_R(o)$.

b) Die Funktion $E_k^j := L_o^{jk}(D)K, j,k = 1,\ldots,N$, löst unter den Voraussetzungen (1.2) das System $L_{oij}\, E_k^j = \delta_{ik} \cdot \delta_o$, $i,k = 1,\ldots,N$, im Distributionssinn auf $\mathbb{R}^n$. (δ_o ist das Dirac-Maß in $o \in \mathbb{R}^n$.) Für $\nu \in \mathbb{N}_o^n$, $j,k = 1,\ldots,N$ und $y \in \mathbb{R}^n - \{o\}$ gilt

(1.7) $|D^\nu E_k^j(y)| \le C(n,N,\lambda,\Lambda,|\nu|)\ |y|^{2-n-|\nu|}$.

Beweis: a) (i),(ii) Lemma 0.7 und die anschließende Bemerkung.

(iii) folgt aus dem Korollar zu Lemma 0.7 und Lemma 1.1, insbesondere aber aus Ungleichung (1.6), die es ermöglicht, die im Korollar auftretenden Größen $\sup_{\partial B_1(o)} |D^\mu K|$ für $\mu \in \mathbb{N}_o^n$ mit $2N-2 \le |\mu| \le 2N+1$ durch die Parameter n,N,λ,Λ abzuschätzen.
(iv) findet man in [18], Thm. 6.2.1(e), für den Fall $f \in C^\infty_{kpt}(B_R(o))$. Allgemeine Funktionen $f \in L^p(B_R(o))$ approximiere man fast überall punktweise auf $B_R(o)$ und in $L^p(B_R(o))$ durch eine Folge $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset C^\infty_{kpt}(B_R(o))$, mit (i) folgt die Behauptung.
b) Man benutzt zum Beweis die Formel (1.5) und beachtet $L_o(D)K_o = \delta_o$ im Distributionssinn nach Lemma 1.1. Die Abschätzung folgt aus (1.6).

QED

Bemerkungen: 1) Die Voraussetzung $n \ge 3$ wird nur für (iii) benötigt, denn im Fall $n \ge 3$ sind alle Ableitungen der Ordnung $\ge 2N-2$ des Kerns K homogene Funktionen, und das liefert die Unabhängigkeit der Konstanten C aus (iii) vom Radius R. Für $n = 2$ erhält man dagegen eine Konstante C, die logarithmisch vom Radius abhängt. Wir betrachten diesen Sonderfall in § 7.
2) Die Aussage b) zeigt insbesondere, wie man sich eine Fundamentallösung zum Operator L_{oij} mit konstanten Koeffizienten $A^{ij}_{\alpha\beta}(o)$ verschafft: Für $x \ne y$ aus $\mathbb{R}^n$ definiert man die Matrix
$E(x,y) := (E^j_k(x-y))_{1\le j,k\le N}$,
und durch Koordinatentransformation verifiziert man
($\delta_y :=$ Dirac-Maß im Punkt y):
$L_{oij}\, E^j_k(\cdot,y) = \delta_{ik}\cdot\delta_y$ für alle $i,k = 1,\dots,N$ und $y \in \mathbb{R}^n$ im Distributionssinn. Sind die Koeffizienten in irgendeinem anderen Punkt $x_o \in \Omega$ eingefroren, so ergibt sich auf demselben

Weg eine Fundamentalmatrix zum Operator $L_{x_o ij}$, wenn man in b) statt K den Kern K_{x_o} wählt.

Nachfolgend nehmen wir weiter $o \in \Omega$ an und definieren unter den Voraussetzungen (1.2) auf $B_R(o)$, $R > o$ beliebig, spezielle Lösungen des Systems

(1.1)o $\quad L_{oij} u^j = f^i - D_\alpha F^i_\alpha$, $i = 1,\ldots,N$.

Definition: Seien $f := (f^i)_{1\le i\le N} \in L^p(B_R(o),\mathbb{R}^N)$,
$F := (F^i_\alpha)_{\substack{1\le i\le N \\ 1\le \alpha\le n}} \in L^p(B_R(o),\mathbb{R}^{nN})$. Man setze für $x \in B_R(o)$ und $k=1,..,N$

$$(P_R f)^k(x) := L_o^{kl}(D)(Q_R f^l)(x) = \int_{B_R(o)} E_l^k(x-y) f^l(y)\,dy$$

$$(\tilde{P}_R F)^k(x) := L_o^{kl}(D) D_\gamma (Q_R F^l_\gamma)(x) = \int_{B_R(o)} (D_\gamma E_l^k)(x-y) F^l_\gamma(y)\,dy \quad .$$

Lemma 1.2 a) (i) und (iii) ergeben unter Beachtung von $\mathrm{ord}(L_o^{kl}(D)) = 2N - 2$ folgende Aussage

Lemma 1.3: Für alle $1 < p < \infty$ und $R > o$ sind unter den Voraussetzungen (1.2)

$P_R : L^p(B_R(o),\mathbb{R}^N) \to H^{2,p}(B_R(o),\mathbb{R}^N)$ und

$\tilde{P}_R : L^p(B_R(o),\mathbb{R}^{nN}) \to H^{1,p}(B_R(o),\mathbb{R}^N)$

stetige lineare Operatoren, deren Norm durch eine Konstante der Form $C(n,N,\lambda,\Lambda,p)$ unabhängig von R abgeschätzt wird, wenn man die Sobolev-Räume $H^{k,p}(B_R(o),\mathbb{R}^N)$ durch $*\|\cdot\|_{H^{k,p}(B_R(o),\mathbb{R}^N)}$ normiert.

Wir beweisen jetzt eine Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für schwache Lösungen von (1.1)o:

Lemma 1.4: Die Voraussetzungen (1.2) seien gültig.

(i) Sind $f \in L^p(B_R(o),\mathbb{R}^N)$ und $F \in L^p(B_R(o),\mathbb{R}^{nN})$ für ein $1 < p < \infty$, so ist $u_o := -\tilde{P}_R F + P_R f$ schwache Lösung von (1.1)o auf $B_R(o)$.

(ii) Haben f,F zusätzlich kompakten Träger in der Kugel $B_R(o)$, und ist $u \in H^{1,1}_{kpt}(B_R(o),\mathbb{R}^N)$ schwache Lösung von (1.1)o auf $B_R(o)$, so gilt $u = u_o$ fast überall auf $B_R(o)$.

Beweis: (i) Sei $\phi \in C^\infty_{kpt}(B_R(o),\mathbb{R}^N)$. Es ist

$$\int_{B_R(o)} A^{ij}_{\alpha\beta}(o) D_\alpha \phi^i D_\beta (+P_R f)^j dx = \int_{B_R(o)} \phi^i L_{oij} (P_R f)^j dx =$$

$$\int_{B_R(o)} \phi^i L_{oij} L_o^{jl}(D)(Q_R f^l) dx = \int_{B_R(o)} \phi^l f^l dx$$

nach Lemma 1.2. Den zweiten auftretenden Term verarbeitet man analog, indem man zunächst die in $\tilde{P}_R F$ auftretende Ableitung "D_γ" auf die Testfunktion ϕ überwälzt.

(ii) Man glätte u durch Faltung mit einem glättenden Kern von sehr kleinem Träger-Radius $\rho > o$, so daß u_ρ noch kompakten Träger in der Kugel $B_R(o)$ hat und dies auch für die entsprechend geglätteten Funktionen f_ρ, F_ρ gilt. Mit (1.5) und Lemma 1.2 (iv) gilt für $x \in B_R(o)$

$$u^k_\rho(x) = L_o^{kl}(D) \int_{B_R(o)} K(x-y) L_{olm}\, u^m_\rho(y) dy, \quad k = 1,\dots,N$$

Diese Formel gilt für jede Funktion $w \in H^{2,p}_{kpt}(B_R(o),\mathbb{R}^N)$ (mit einem $p > 1$) statt u_ρ, aber nicht für die betrachtete Funktion u, denn diese ist nur einmal schwach differenzier-

bar. Deshalb müssen wir zunächst mit den geglätteten Funktionen rechnen. Die Gleichung

$$L_{olm}\, u_\rho^m = f_\rho^l - D_\alpha (F_\alpha^l)_\rho \ , \quad l = 1,\dots,N$$

gilt punktweise auf $B_R(o)$, Einsetzen in die obige Identität ergibt:

$$u_\rho^k(x) = (P_R f_\rho)^k(x) - L_o^{kl}(D) \int_{B_R(o)} K(x-y) D_\alpha (F_\alpha^l)_\rho(y)\, dy$$

Da F_ρ aus $C^\infty_{kpt}(B_R(o), \mathbb{R}^{nN})$ ist, kann man im Integral partiell ohne Randterme integrieren, mit $\rho \downarrow o$ folgt die Behauptung.

QED

Bevor wir das lokale Regularitätsresultat (Satz 2) formulieren, wollen wir angeben, wie man spezielle Lösungen des Systems

$$L_{x_o ij}\, u^j = f^i - D_\alpha F_\alpha^i \ , \ i = 1,\dots,N, \text{ auf } B_R(x_o)$$

erhält, wenn x_o irgendein Punkt $\neq o$ aus Ω ist und f,F L^p-Funktionen auf $B_R(x_o)$ sind: Zunächst verschiebt man dazu f und F in den Ursprung, d.h. setzt für $x \in B_R(o)$

$$g(x) := f(x + x_o), \ G(x) := F(x + x_o).$$

Die Operatoren $P_{x_o,R}$, $\tilde{P}_{x_o,R}$ bildet man mit $L^{kl}_{x_o}(D)$ statt $L^{kl}_o(D)$ und K_{x_o} statt K in der Definition von Q_R. Dann gilt nach dem gerade bewiesenen Lemma:

$v := P_{x_o,R} g - \tilde{P}_{x_o,R} G$ ist schwache Lösung von $L_{x_o ij} v^j = g^i - D_\alpha G_\alpha^i$, $i = 1,\dots,N$, auf $B_R(o)$. Die Funktion $u(x) := v(x - x_o)$, $x \in B_R(x_o)$, ergibt dann offenbar eine Lösung des o.g. Systems.

Vor dem Beweis des folgenden Satz 2 führen wir noch folgende Klasse von Operatoren ein:

Definition: Unter den Voraussetzungen (1.2) sei $o \in \Omega$. Für $1 < p < \infty$ und $o < R < \operatorname{dist}(o, \partial\Omega)$ sei

$T_R^p : H^{1,p}(B_R(o), \mathbb{R}^N) \to H^{1,p}(B_R(o), \mathbb{R}^N)$ definiert durch

$$T_R^p(u) := \tilde{P}_R(F), \quad F_\alpha^i := (A_{\alpha\beta}^{ij} - A_{\alpha\beta}^{ij}(o)) D_\beta u^j, \quad i = 1,\dots,N, \ \alpha = 1,\dots,n.$$

Nach Lemma 1.3 ist T_R^p ein stetiger Operator mit

$$(1.8) \quad {}^*\|T_R^p u\|_{H^{1,p}(B_R(o),\mathbb{R}^N)} \le C(n,N,\lambda,\Lambda,p) \cdot \operatorname{osc}_{B_R(o)} A^* \cdot \|u\|_{H^{1,p}(B_R(o),\mathbb{R}^N)},$$

$$\operatorname{osc}_{B_R(o)} A := \sup_{\substack{i,j=1,\dots,N \\ \alpha,\beta=1,\dots,n}} \|A_{\alpha\beta}^{ij} - A_{\alpha\beta}^{ij}(o)\|_{L^\infty(B_R(o))},$$

und nach Lemma 1.4 ist $v := T_R^p u$ schwache Lösung des Systems

$$(1.9) \quad L_{oij} v^j = +D_\alpha(\{A_{\alpha\beta}^{ij} - A_{\alpha\beta}^{ij}(o)\} D_\beta u^j), \quad i = 1,\dots,N, \text{ auf } B_R(o)$$

□

Mit Hilfe der vorstehenden Hilfssätze sind wir nun in der Lage, die lokale Version von Satz 1 zu beweisen. Man findet dieses Resultat ohne Beweis in [18], Thm. 6.4.3.

Satz 2: Seien $1 < p,q < \infty$, $F \in L^q_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^{nN})$, $f \in L^p_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, und $u \in H^{1,p}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ sei schwache Lösung von (1.1) unter den Voraussetzungen (1.2), insbesondere sind also die Leitkoeffizienten stetig. Dann gilt

$$u \in H^{1,r}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^N) \text{ für } r := \min\{q, s(p)\}, \ s(p) := \begin{cases} \frac{np}{n-p} & \text{für } p < n \\ \infty & \text{für } p \ge n \end{cases}.$$

□

Korollar 1: Sind f,F lokal beschränkte Funktionen auf Ω, so gilt $u \in \bigcap_{1\le r<\infty} H^{1,r}_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, speziell ist u stetig auf Ω.

Beweis von Satz 2: Es gelte zunächst (i) $p < n$ und $p \le s := \frac{np}{n-p} \le q$. Ohne Einschränkung wird $o \in \Omega$ angenommen, wir zeigen $u \in H^{1,s}(B_R(o),\mathbb{R}^N)$ für genügend kleine Radien $R > o$. Betrachtet man statt o irgendeinen Punkt $x_o \in \Omega$, so ist der Beweis nachfolgend entsprechend den Bemerkungen von Seite 40 zu modifizieren. Man wähle $R \le \frac{1}{2}\,\mathrm{dist}(o,\partial\Omega)$ und

$\eta \in C^\infty_{kpt}(B_{2R}(o),[o,1])$ mit $\eta \equiv 1$ auf $B_R(o)$, $|\nabla\eta| \le 2/R$.

Die Funktion $\tilde{u} := \eta u$ hat kompakten Träger in $B_{2R}(o)$ und löst dort schwach das System

$L_{ij}\tilde{u}^j = \tilde{f}^i - D_\alpha \tilde{F}^i_\alpha$, $i = 1,..,N$, mit folgenden Funktionen

$$\left.\begin{aligned}\tilde{f}^i &:= \eta f^i + F^i_\alpha D_\alpha\eta - A^{ij}_{\alpha\beta} D_\alpha\eta\, D_\beta u^j \\ \tilde{F}^i_\alpha &:= + A^{ij}_{\alpha\beta}\, D_\beta\eta\, u^j + \eta F^i_\alpha\end{aligned}\right\} \in L^p_{kpt}(B_{2R}(o),\mathbb{R}),\ i=1,..,N,\alpha=1,..,n$$

oder aequivalent:

$L_{oij}\tilde{u}^j = \tilde{f}^i - D_\alpha(\tilde{F}^i_\alpha - G^i_\alpha)$, $i = 1,..,N$, mit $G^i_\alpha := +(A^{ij}_{\alpha\beta} - A^{ij}_{\alpha\beta}(o))D_\beta\tilde{u}^j$

Nach Lemma 1.4 (ii) folgt hieraus

$\tilde{u} = P_{2R}\tilde{f} - \tilde{P}_{2R}(\tilde{F} - \tilde{G}) = P_{2R}\tilde{f} - \tilde{P}_{2R}\tilde{F} + T^p_{2R}\tilde{u} \iff$

(1.10) $\tilde{u} - T^p_{2R}\tilde{u} = P_{2R}\tilde{f} - \tilde{P}_{2R}\tilde{F}$ auf $B_{2R}(o)$

Die Funktion $\tilde{f}$ rechts liegt in $L^p(B_{2R}(o),\mathbb{R}^N)$, nach Lemma 1.3 und der Sobolev-Einbettung Lemma 0.1 (ii) gilt

$P_{2R}\tilde{f} \in H^{1,s}(B_{2R}(o),\mathbb{R}^N)$. Benutzt man Lemma 0.1 (ii) für $\tilde{u}$ und

beachtet die Voraussetzung $q \geq s$ im Fall (i), so gilt $\tilde{F} \in L^s(B_{2R}(o), \mathbb{R}^N)$, also $\tilde{P}_{2R}\tilde{F} \in H^{1,s}(B_{2R}(o), \mathbb{R}^N)$ nach Lemma 1.3, folglich $\varphi := \tilde{u} - T^p_{2R}\tilde{u} \in H^{1,s}(B_{2R}(o), \mathbb{R}^N)$.

Auf den Sobolev-Räumen $H^{1,p}(B_{2R}(o), \mathbb{R}^N)$ und $H^{1,s}(B_{2R}(o), \mathbb{R}^N)$ legen wir die Norm $*\|\cdot\|_{H^{1,p}}$ bzw. $*\|\cdot\|_{H^{1,s}}$ zugrunde und bezeichnen die zugehörigen Normen der Operatoren T^p_{2R} bzw. T^s_{2R} mit $*\|\cdot\|$.

Aus (1.8) folgt offenbar für hinreichend kleines $R_o > o$ (wegen der Stetigkeit der Koeffizienten)

(1.11) für $o < R \leq \min(R_o, \frac{1}{2}\mathrm{dist}(o, \partial\Omega))$ sind $*\|T^p_{2R}\|$ und $*\|T^s_{2R}\| \leq 1/2$. R_o hängt ab von $n, N, \lambda, \Lambda, p$ und dem Stetigkeitsmodul der Koeffizienten.

Für $R > o$, die (1.11) genügen, sind die Operatoren $\mathrm{Id} - T^p_{2R}$ und $\mathrm{Id} - T^s_{2R}$ Bijektionen ([12], Lemma 23.2), man findet deshalb $w \in H^{1,s}(B_{2R}(o), \mathbb{R}^N)$ mit $(\mathrm{Id} - T^s_{2R})w = \varphi$, also

$$(\mathrm{Id} - T^s_{2R})w = (\mathrm{Id} - T^p_{2R})\tilde{u} .$$

Trivialerweise gilt $T^s_{2R} = T^p_{2R}$ auf dem Raum $H^{1,s}(B_{2R}(o), \mathbb{R}^N)$, also $(\mathrm{Id} - T^p_{2R})w = (\mathrm{Id} - T^p_{2R})\tilde{u} \Rightarrow w = \tilde{u}$ wegen der Injektivität von $\mathrm{Id} - T^p_{2R}$. Damit ist die Behauptung unter der Voraussetzung (i) verifiziert.

Wir betrachten noch die Fälle (ii) $p \geq q$ und (iii) $n \leq p \leq q$.

Bei (ii) ist $u \in H^{1,q}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ zu beweisen, was aber trivial ist.

Auch im Fall (iii) lautet die Behauptung $u \in H^{1,q}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Man wähle $t := \frac{nq}{n+q} \in]1, n[$; der Sobolev-Exponent zu t ist dann gerade q. Beachtet man $u \in H^{1,t}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $F \in L^q_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^{nN})$ und $f \in L^t_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, so folgt die Behauptung wie in (i), wenn man dort p durch t und s durch q ersetzt. QED

Beweis von Korollar 1: Man hat die Information $u \in H^{1,p}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ mit einem $p, 1 < p \leq \infty$.

1. Fall: $p \geq n$

Dann liegt u im Sobolev-Raum $H^{1,n-\delta}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ für alle δ aus $]o,1[$, also nach Satz 2 $u \in H^{1,s(\delta)}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ mit $s(\delta) := \frac{n}{\delta}(n-\delta)$. Beachtet man $s(\delta) \to \infty$ bei $\delta \searrow o$, so folgt die Behauptung.

2. Fall: $1 < p < n$

Ohne Einschränkung sei $1 < p < \frac{n}{n-1}$. $(n-1)$-fache Anwendung von Satz 2 ergibt $u \in H^{1,q}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $q := \frac{np}{n-(n-1)p}$. Da $q > n$ ist, können wir Fall 1 benutzen.

QED

Dem Beweis von Satz 2 entnimmt man

Korollar 2: Sei $1 < p < \frac{n}{n-1}$, $q := \frac{np}{n-(n-1)p} > n$. $u \in H^{1,p}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ sei schwache Lösung von (1.1) unter den Voraussetzungen (1.2) mit $f \equiv o$, $F \equiv o$. Dann gibt es eine Konstante C nur abhängig von $n, N, \lambda, \Lambda, p$ und eine zweite Konstante R_o, die zusätzlich noch vom Stetigkeitsmodul der Koeffizienten abhängt, so daß für alle $x_o \in \Omega$ und $o < R \leq \min(\frac{1}{2}\mathrm{dist}(x_o, \partial\Omega), R_o)$ die folgenden Abschätzungen erfüllt sind:

(1.12) $$ {}^*\|u\|_{H^{1,q}(B_R(x_o), \mathbb{R}^N)} \leq C\, R^{1-n}\, {}^*\|u\|_{H^{1,p}(B_{2R}(x_o), \mathbb{R}^N)} $$

(1.13) $$ {}^*\|u\|_{H^{1,2}(B_R(x_o), \mathbb{R}^N)} \leq C \cdot R^{\frac{n}{2}-\frac{n}{p}}\, {}^*\|u\|_{H^{1,p}(B_{2R}(x_o), \mathbb{R}^N)} $$

Anmerkung: Gemäß $q > n$ liefert (1.12) nach der Sobolev-Einbettung Informationen über den lokalen Stetigkeitsmodul der Lösung u des homogenen Systems in Termen der $H^{1,p}$-Norm.

Beweis: O.E. wird $x_o = o \in \Omega$ angenommen. Nach Korollar 1 gilt $u \in \bigcap_{1\le r<\infty} H^{1,r}_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, d.h. wir haben gemäß (1.10) und der Tatsache daß $T^{r_1}_{2R} = T^{r_2}_{2R}$ gilt auf $H^{1,r_2}(B_{2R}(o),\mathbb{R}^N)$ für $r_1 \le r_2$, die Gleichung (*) $\tilde{u} - T^{s}_{2R}\,\tilde{u} = \tilde{P}_{2R}\tilde{F} - P_{2R}\tilde{f}$ auf $B_{2R}(o)$ für alle $s \in]1,\infty[$ (Notationen aus dem Beweis von Satz 2). Sei $s_k := \frac{n\,p}{n-p\cdot k}$, $k = 0,..,n-1$. R_o wird so gewählt, daß alle Operatoren $T^{s_k}_{2R}$ bzgl. der Norm $^*\|\cdot\|_{H^{1,s_k}(B_{2R}(o),\mathbb{R}^N)}$ auf $H^{1,s_k}(B_{2R}(o),\mathbb{R}^N)$ Norm $\le\frac{1}{2}$ haben. Dies ist nach (1.8) mit einem positiven R_o (abhängig von den genannten Daten) möglich. Unter dieser Voraussetzung folgt nach Lemma 1.3 und Lemma 0.1 (ii)

$$
\begin{aligned}
&{}^*\|\tilde{u}\|_{H^{1,s_1}(B_{2R}(o),\mathbb{R}^N)}\\
&\le 2\,({}^*\|\tilde{P}_{2R}\tilde{F}\|_{H^{1,s_1}(B_{2R}(o),\mathbb{R}^N)} + {}^*\|P_{2R}\tilde{f}\|_{H^{1,s_1}(B_{2R}(o),\mathbb{R}^N)})\\
&\le C\,\{\|\tilde{F}\|_{L^{s_1}(B_{2R}(o),\mathbb{R}^{nN})} + {}^*\|P_{2R}f\|_{H^{2,p}(B_{2R}(o),\mathbb{R}^N)}\}\\
&\le C\{\|\tilde{F}\|_{L^{s_1}(B_{2R}(o),\mathbb{R}^{nN})} + \|\tilde{f}\|_{L^{p}(B_{2R}(o),\mathbb{R}^N)}\}
\end{aligned}
$$

Für die Lebesgue-Normen der Funktionen rechts gilt

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{F}\|_{L^{s_1}(B_{2R}(o),\mathbb{R}^{nN})} &\le C(n,N,\Lambda)\cdot\sup_{B_{2R}(o)}|\nabla\eta|\cdot\|u\|_{L^{s_1}(B_{2R}(o),\mathbb{R}^N)}\\
&\le C\sup_{B_{2R}(o)}|\nabla\eta|\cdot{}^*\|u\|_{H^{1,p}(B_{2R}(o),\mathbb{R}^N)} \quad\text{und}\\
\|\tilde{f}\|_{L^{p}(B_{2R}(o),\mathbb{R}^N)} &\le C\sup_{B_{2R}(o)}|\nabla\eta|\cdot\|\nabla u\|_{L^{p}(B_{2R}(o),\mathbb{R}^{nN})}
\end{aligned}
$$

Hierbei ist $\eta \in C^{\infty}_{kpt}(B_{2R}(o))$ beliebig. Im ersten Schritt wählt man $\eta \equiv 1$ auf $B_{\frac{3}{2}R}(o)$, $|\nabla\eta| \le C/R$. Dann folgt

$$*\|u\|_{H^{1,s_1}(B_{\frac{3}{2}R}(o),\mathbb{R}^N)} \le C\, R^{-1} \cdot *\|u\|_{H^{1,p}(B_{2R}(o),\mathbb{R}^N)}$$

Nun wähle man eine Abschneidefunktion $\eta \in C^{\infty}_{kpt}(B_{2R}(o))$ mit $\eta \equiv 1$ auf $B_{\frac{5}{4}R}(o)$, $|\nabla\eta| \le C/R$, die außerhalb $B_{\frac{3}{2}R}(o)$ verschwindet, und gehe zurück in die Gleichung (*). Mit $s = s_2$ folgt wie oben

$$*\|u\|_{H^{1,s_2}(B_{\frac{5}{4}R}(o),\mathbb{R}^N)} \le C\, R^{-1} * \|u\|_{H^{1,s_1}(B_{\frac{3}{2}R}(o),\mathbb{R}^N)}$$

$$\le C\, R^{-2} * \|u\|_{H^{1,p}(B_{2R}(o),\mathbb{R}^N)}$$

So fortfahrend erhält man nach insgesamt (n-1)-Schritten die Abschätzung (1.12). Die zweite Ungleichung folgt dann mit der Hölder-Ungleichung.

QED

Wir wollen noch kurz andeuten, wie man Regularitätsaussagen auch dann noch ableiten kann, wenn die Koeffizienten $A^{ij}_{\alpha\beta}, i,j = 1,..,N$, $\alpha,\beta = 1,..,n$, nicht mehr stetig sind, also nur (GV)II,III erfüllen, wobei wir weiter $n \ge 3$ annehmen: Das entscheidende Argument im Beweis von Satz 2 ist die Beobachtung, daß die Norm der Operatoren $T^s_R \le 1/2$ ist, wenn nur R unterhalb einer gewissen Schranke liegt, die im wesentlichen durch die lokale Oszillation der Koeffizienten bestimmt wird. Für $i,j = 1,..,N$, $\alpha,\beta = 1,..,n$ seien $a^{ij}_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$ mit (GV)III, wir

setzen $\omega(\Omega) := \sup_{\substack{i,j=1,..,N \\ \alpha,\beta=1,..,n}} \|A^{ij}_{\alpha\beta} - a^{ij}_{\alpha\beta}\|_{L^\infty(\Omega)}$

ohne Einschränkung gelte $o \in \Omega$. Man definiere nun sämtliche Potentialoperatoren mit $a^{ij}_{\alpha\beta}$ statt wie früher $A^{ij}_{\alpha\beta}(o)$. Aus (1.8) wird dann die Abschätzung

$*\|T^p_R\| \le C(n,N,\lambda,\Lambda,p)\cdot\omega(\Omega)$ für alle $o < R \le \operatorname{dist}(o,\partial\Omega)$,

also $*\|T^p_R\| \le 1/2$, wenn die Koeffizienten $A^{ij}_{\alpha\beta}$ nur wenig von den Konstanten $a^{ij}_{\alpha\beta}$ abweichen, d.h. eine Bedingung der Form $\omega(\Omega) \le \varepsilon_o(n,N,\lambda,\Lambda,p)$ erfüllen. Dann kann man wie vorgeführt argumentieren und erhält höhere Integrierbarkeit von ∇u, wobei allerdings ε_o kleiner wird, wenn die zu erzielende Integrierbarkeitsstufe wachsen soll. Wir werden das gerade Gesagte in § 6 wieder aufgreifen.

Anhang zu § 1

Wir beginnen mit einigen Folgerungen aus Satz 2, die wir in § 4 benötigen.

Lemma 1.5: Es seien $1 < p < \frac{n}{n-1}$, $q := \frac{np}{n-(n-1)p} > n$. Dann gibt es unter der Voraussetzung (1.2) eine Konstante C nur abhängig von $n, N, \lambda, \Lambda, p$ und eine zweite Konstante R_o, die zusätzlich noch vom Stetigkeitsmodul der Koeffizienten abhängt, so daß für alle Punkte $x_o \in \Omega$, alle Radien R mit $o < R < \min(R_o, \frac{1}{4}\operatorname{dist}(x_o, \partial\Omega))$ und alle Funktionen $u \in H^{1,p}(B_{4R}(x_o), \mathbb{R}^N)$, die auf $B_{4R}(x_o) - \{x_o\}$ das homogene System lösen, die nachstehende Abschätzung gilt:

$(D_R := B_{2R}(x_o) - B_{\frac{R}{2}}(x_o))$

$$\underline{(1.14)} \quad \frac{1}{R}\|u\|_{L^q(D_R, \mathbb{R}^N)} + \|\nabla u\|_{L^q(D_R, \mathbb{R}^{nN})} \leq CR^{1-n*}\|u\|_{H^{1,p}(B_{4R}(x_o), \mathbb{R}^N)}$$

Man beweist diese Abschätzung wie die entsprechende Ungleichung (1.12) aus Korollar 2 zu Satz 2. Der einzige Unterschied besteht darin, daß die im Beweis von Korollar 2 zu Satz 2 betrachtete Abschneidefunktion η jetzt Träger auf Ringgebieten um den betrachteten Punkt haben muß. Zum Beispiel wählt man im ersten Schritt $\eta \in C^\infty_{kpt}(B_{3R}(x_o), [o,1])$ mit $\eta \equiv 1$ auf D_R, $\eta \equiv 0$ auf $B_{\frac{R}{4}}(x_o)$ und $|\nabla\eta| \leq \frac{8}{R}$. Alle anderen Überlegungen gelten mit geringen Modifikationen, R_o wird beispielsweise so eingerichtet, daß sämtliche Operatoren (o.E. $x_o = o$) $T^{s_k}_{4R}$ für $s_k := \frac{np}{n-p\cdot k}$, $k = o, \ldots, n-1$, und $o < R \leq \min(R_o, \frac{1}{4}\operatorname{dist}(o, \partial\Omega))$ bzgl. der Norm $*\|\cdot\|_{H^{1,s_k}(B_{4R}(o), \mathbb{R}^N)}$

auf $H^{1,s_k}(B_{4R}(o),\mathbb{R}^N)$ Norm $\leq \frac{1}{2}$ haben.

□

Korollar 1 zu Satz 2 kann wie folgt verschärft werden.

Lemma 1.6: Seien die Voraussetzungen (1.2) erfüllt, $1 < p < \frac{n}{n-1}$ sei beliebig; wir setzen $q := \frac{np}{n-(n-1)p} > n$ und $s := \frac{np}{n-(n-2)p}$. Ist dann $u \in H^{1,p}_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ schwache Lösung von $L_{ij}u^j = f^i - D_\alpha F^i_\alpha$, $i = 1,..,N$, auf Ω mit Funktionen $f \in L^s_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, $F \in L^q_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^{nN})$, so liegt u im Sobolev-Raum $H^{1,q}_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, und man hat für Gebiete $D' \subset D$ mit kompaktem Abschluß in Ω die Abschätzung

$$\|u\|_{H^{1,q}(D',\mathbb{R}^N)} \leq C\{\|u\|_{H^{1,p}(D,\mathbb{R}^N)} + \|f\|_{L^s(D,\mathbb{R}^N)} + \|F\|_{L^q(D,\mathbb{R}^{nN})}\},$$

wo die Konstante C bestimmt wird durch den Stetigkeitsmodul der Koeffizienten sowie die Größen n,N,λ,Λ,p und die Geometrie der Gebiete D,D'.

Beweisskizze: Ohne Einschränkung gelte $o \in \Omega$. Zunächst haben wir mit den Argumenten aus dem Beweis von Satz 2 die Gleichung (1.10), also $\tilde{u} - T^p_{2R}\tilde{u} = P_{2R}\tilde{f} - \tilde{P}_{2R}\tilde{F}$ auf $B_{2R}(o)$ mit den im Beweis von Satz 2 definierten Funktionen. Nun wählen wir R_o wie im Beweis von Korollar 2 zu Satz 2 und verlangen $o < R \leq \min(R_o, \frac{1}{2}\mathrm{dist}(\partial\Omega,o))$. Dann können wir oben $T^p_{2R}\tilde{u}$ durch $T^{s_1}_{2R}\tilde{u}$ ersetzen (vgl. den Beweis von Satz 2), $s_1 := \frac{np}{n-p}$, und erhalten gemäß $^*\|T^{s_1}_{2R}\| \leq \frac{1}{2}$ die Abschätzung (mit Lemma 1.3 und Lemma 0.1(ii))

$$^*\|\tilde{u}\|_{H^{1,s_1}(B_{2R}(o),\mathbb{R}^N)} \leq 2\ \{^*\|P_{2R}\tilde{f}\|_{H^{1,s_1}(B_{2R}(o),\mathbb{R}^N)} + {}^*\|\tilde{P}_{2R}\tilde{F}\|_{H^{1,s_1}(B_{2R}(o),\mathbb{R}^{nN})}\}$$

$$\leq C(n,N,\lambda,\Lambda,p)\ \|\nabla\eta\|_{L^\infty(B_{2R}(o))}\{^*\|u\|_{H^{1,p}(B_{2R}(o),\mathbb{R}^N)} + \|f\|_{L^p(B_{2R}(o),\mathbb{R}^N)}$$

$$+ \|F\|_{L^p(B_{2R}(o),\mathbb{R}^{nN})} + \|F\|_{L^{s_1}(B_{2R}(o),\mathbb{R}^{nN})}\}$$

Durch geeignete Wahl von η und Iteration (ersetze in der vorstehenden Ungleichung s_1 durch $s_2 := \frac{ns_1}{n-s_1}$ und p durch s_1, usw.) folgt mit einer Konstanten $C(R)$ abhängig von n,N,λ,Λ,p,R:

$$*\|u\|_{H^{1,q}(B_R(o),\mathbb{R}^N)} \leq C(R)\{*\|u\|_{H^{1,p}(B_{2R}(o),\mathbb{R}^N)} + \|f\|_{L^s(B_{2R}(o),\mathbb{R}^N)} + \|F\|_{L^q(B_{2R(o)},\mathbb{R}^{nN}}$$

Ein Überdeckungsargument ergibt das gewünschte Resultat.

□

Wir wollen jetzt Satz 1 dazu benutzen, die Existenz einer eindeutigen $\overset{o}{H}{}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ -Lösung u des Systems

(1.15) $L_{ij}u^j = -D_\alpha F^i_\alpha$, $i = 1,..,N$, auf Ω

zu beweisen, wenn die rechte Seite F nur in $L^p(\Omega,\mathbb{R}^{nN})$ mit Exponent $1 < p < 2$ liegt. Unser Vorgehen orientiert sich dabei an der Arbeit [17] von Meyers.

Satz 1*: Die Voraussetzungen (1.2) seien erfüllt, wobei auch $n = 2$ zugelassen ist. Dann hat (1.15) für alle reellen Exponenten $p > 1$ bei vorgegebener rechter Seite $F \in L^p(\Omega,\mathbb{R}^{nN})$ genau eine schwache Lösung $u \in \overset{o}{H}{}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$. Es gilt

(1.16) $$\|u\|_{\overset{o}{H}{}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)} \leq C\|F\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^{nN})}$$

mit einer positiven Konstanten C, die bestimmt wird von $n,N,\lambda,\Lambda,p,\Omega$ und dem Stetigkeitsmodul der Koeffizienten.

Anmerkung: Wir normieren nachfolgend die Sobolev-Räume $\overset{o}{H}{}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ durch $\|\phi\|_{1,p} := \|\nabla\phi\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^{nN})}$ (vgl. Lemma 0.2).

Beweis: Zunächst gilt Satz 1 unter sonst gleichen Voraussetzungen

auch im Fall n = 2, vgl. [18], Thm. 6.4.8.

Fall 1: $p \geq 2$ Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung im Raum $\overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ sind dann klar. Die Zugehörigkeit der Lösung zum Sobolev-Raum $\overset{\circ}{H}{}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ folgt aus Satz 1; die Abschätzung (1.16) gilt nach Anmerkung 1) zu Korollar 1/Satz 1.

Fall 2: $1 < p < 2$ Sei $q := \frac{p}{p-1} > 2$. Angenommen es gilt

(1.17) $$\inf_{\|\phi\|_{1,p}=1} \{\sup_{\|\psi\|_{1,q}=1} \int_\Omega A^{ij}_{\alpha\beta} D_\alpha \psi^i D_\beta \phi^j dx\} \geq \frac{1}{K}$$

mit einer positiven Konstanten K, die von denselben Parametern wie C aus (1.16) bestimmt wird. Hierin durchläuft ϕ den Raum $\overset{\circ}{H}{}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, ψ den Raum $\overset{\circ}{H}{}^{1,q}(\Omega,\mathbb{R}^N)$.

Sei $o \neq F \in L^p(\Omega,\mathbb{R}^{nN})$ gegeben. Man wähle eine Folge (F_k) in $L^2(\Omega,\mathbb{R}^{nN})$ mit $F_k \xrightarrow{k\to\infty} F$ in $L^p(\Omega,\mathbb{R}^{Nn})$. u_k sei die $\overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)$-Lösung von

(1.18) $$L_{ij}\, u^j_k = -D_\alpha F^i_{\alpha k},\ i = 1,..,N, \text{ auf } \Omega$$

Dann gilt für jede Funktion $\psi \in \overset{\circ}{H}{}^{1,q}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ mit $\|\psi\|_{1,q} = 1$

$$\int_\Omega A^{ij}_{\alpha\beta} D_\alpha \psi^i D_\beta u^j_k \, dx = \int_\Omega F^i_{\alpha k} D_\alpha \psi^i \, dx \leq \|F_k\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^{nN})}, \text{ also}$$

folgt mit $\phi_k := \frac{1}{\|u_k\|_{1,p}} u_k$:

$$\|u_k\|_{1,p} \sup_{\|\psi\|_{1,q}=1} \int_\Omega A^{ij}_{\alpha\beta} D_\alpha \psi^i D_\beta \phi^i_k \, dx \leq \|F_k\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^{nN})}$$

(1.17) ergibt $\|u_k\|_{1,p} \leq K \cdot \|F_k\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^{nN})}$. Dasselbe Argument führt auf $\|u_k - u_l\|_{1,p} \leq K \|F_k - F_l\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^{nN})}$, $k,l \in \mathbb{N}$. Daher ist (u_k) eine Cauchy-Folge in $\overset{\circ}{H}{}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$. Der Limes $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ erfüllt (1.16) mit C = K und durch Grenzübergang in der schwachen Form von (1.18) folgt (1.15). Die Eindeutigkeitsaussage folgt entweder aus

Korollar 2 zu Satz 1 oder aus (1.17): Die Differenz w zweier $\overset{\circ}{H}{}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$-Lösungen von (1.15) erfüllt ja

$\sup_{\|\psi\|_{1,q}=1} \int_\Omega A^{ij}_{\alpha\beta} D_\alpha \psi^i D_\beta w^j \, dx = o$, was nach (1.17) $w = o$ bedeutet.

Wir beweisen jetzt die zentrale Abschätzung (1.17):

Sei $T : L^q(\Omega,\mathbb{R}^{nN}) \to L^q(\Omega,\mathbb{R}^{nN})$ derjenige lineare Operator, welcher $F \in L^q(\Omega,\mathbb{R}^{nN})$ den Gradienten der eindeutig bestimmten $\overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)$-Lösung u des Systems $L^t_{ij} u^j = -D_\alpha F^i_\alpha$, $i = 1,..,N$, auf Ω zuordnet. Nach Fall 1 (für q statt p und das transponierte System) ist T wohldefiniert, und die Norm von T wird abgeschätzt durch eine Konstante K, die von denselben Parametern wie C aus (1.16) abhängt. Sei $\phi \in \overset{\circ}{H}{}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ mit $\|\phi\|_{1,p} = 1$ gegeben. Wir setzen $F^i_\alpha := D_\alpha \phi^i \, |\nabla\phi|^{p-2}$.

Es gilt $F \in L^q(\Omega,\mathbb{R}^N)$ mit $\|F\|_{L^q(\Omega,\mathbb{R}^N)} = \|\phi\|^{\frac{p}{q}}_{1,p}$, so daß folgt

$$\sup_{\|\psi\|_{1,q}=1} \int_\Omega A^{ij}_{\alpha\beta} D_\alpha \psi^i D_\beta \phi^j dx \geq \|T(F)\|^{-1}_{L^q(\Omega,\mathbb{R}^{nN})} \int_\Omega A^{ij}_{\alpha\beta} \, T(F)^i_\alpha D_\beta \phi^j dx =$$

$$\|T(F)\|^{-1}_{L^q(\Omega,\mathbb{R}^{nN})} \int_\Omega F^i_\alpha D_\alpha \phi^i \, dx = \|T(F)\|^{-1}_{L^q(\Omega,\mathbb{R}^{nN})} \int_\Omega |\nabla\phi|^p \, dx \geq$$

$$K^{-1} \, \|F\|^{-1}_{L^q(\Omega,\mathbb{R}^N)} \int_\Omega |\nabla\phi|^p dx = K^{-1} \|\phi\|_{1,p} = K^{-1}$$

Geht man zum Infimum über $\phi \in \overset{\circ}{H}{}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ mit $\|\phi\|_{1,p} = 1$, so folgt (1.17).

QED

Anmerkung: 1) Der Beweis von Satz 1* benutzt ein "Dualisierungsargument": Aus Existenz- und Regularitätsaussagen über schwache Lösungen u des transponierten Systems $L^t_{ij} u^j = -D_\alpha F^i_\alpha$, $i = 1,..,N$,

auf Ω in Sobolev-Räumen mit "großem" Exponent $p(\geq 2)$ erhält man einen Existenzsatz für das System $L_{ij}u^j = -D_\alpha F^i_\alpha$, $i = 1,..,N$, auf Ω in den Sobolev-Räumen mit dem konjugierten (kleinen) Exponent $p'(:= \frac{p}{p-1} \leq 2)$. Ein ähnlicher Dualisierungsprozeß ist Gegenstand von § 2.

2) Satz 1* gilt unter sonst gleichen Voraussetzungen unverändert, wenn man statt (1.15) das System $L_{ij}u^j = -D_\alpha F^i_\alpha + f^i$, $i = 1,..,N$, auf Ω betrachtet, wo $f \in L^s(\Omega,\mathbb{R}^N)$ mit $s := \frac{pn}{n+p}$ zusätzlich vorgegeben ist. Lediglich die Abschätzung (1.15) lautet jetzt:

$$\|u\|_{\overset{\circ}{H}{}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)} \leq C\{\|F\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^{nN})} + \|f\|_{L^s(\Omega,\mathbb{R}^N)}\} .$$

Zum Beweis betrachtet man das mit dem Standardkern zum Laplace-Operator (vgl. [18], Definition (2.4.2)) über Ω gebildete Potential V von f. Nach Theorem 3.71 in [18] gilt

$$V \in H^{2,s}(\Omega,\mathbb{R}^N) \text{ mit } \|V\|_{H^{2,s}(\Omega,\mathbb{R}^N)} \leq C \|f\|_{L^s(\Omega,\mathbb{R}^N)}, \; C = C(n,N,s,\Omega),$$

und $\Delta V = f$ auf Ω, also

$$-\int_\Omega D_\alpha V^i D_\alpha \psi^i \, dx = \int_\Omega \psi^i f^i dx \quad \text{für alle } \psi \in C^\infty_{kpt}(\Omega,\mathbb{R}^N) .$$

Ersetzt man daher im Beweis von Satz 1* F durch $\tilde{F}^i_\alpha := F^i_\alpha - D_\alpha V^i$, so folgt die Behauptung, wenn man noch

$\|\nabla V\|_{H^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^{nN})} \leq C(n,N,p,\Omega)\|V\|_{H^{2,s}(\Omega,\mathbb{R}^N)}$ nach [1], 5.4 Theorem (Part I, Case A (3)) beachtet.

§ 2 Systeme mit Maßen als rechter Seite

Wir wollen die Ergebnisse des ersten Paragraphen nachfolgend dazu benutzen, die Existenz schwacher Lösungen des Systems

(2.1) $L_{ij}\, u^j = \mu^i$ auf Ω, $i = 1,\dots,N$

zu beweisen, wenn die μ^i, $i = 1,\dots,N$, signierte Radon-Maße endlicher totaler Variation auf Ω sind. Dabei machen wir die folgenden Voraussetzungen

(2.2) (GV) von Seite 28 mit $n \geq 3$; $A^{ij}_{\alpha\beta} \in C^0(\bar{\Omega})$, $i,j = 1,\dots,N$, $\alpha,\beta = 1,\dots,n$,

und nennen dann in Analogie zur Definition auf Seite 29 eine Funktion $u \in H^{1,1}_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ schwache Lösung von (2.1), wenn für alle Testvektoren $\varphi \in C^\infty_{kpt}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ die Integralrelation

(2.3) $\int_\Omega A^{ij}_{\alpha\beta}\, D_\alpha\varphi^i\, D_\beta u^j\, dx = \int_\Omega \varphi^i d\mu^i$

erfüllt ist. Wir zeigen, daß (2.1) eine schwache Lösung u_μ im Raum $\overset{\circ}{H}{}^{1,r}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, $1 \leq r < \frac{n}{n-1}$, besitzt, die in jeder Klasse $\overset{\circ}{H}{}^{1,1+\varepsilon}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ für ein $\varepsilon > 0$ eindeutig bestimmt ist (vgl. Satz 3). Durch spezielle Wahl der Maße μ^i erhalten wir insbesondere die Existenz der Greenschen Matrix.

Um die obengenannte schwache Lösung u_μ von (2.1) zu finden, folgen wir dem Vorgehen von Littman, Stampacchia, Weinberger ([15]), indem wir die Regularitätssätze aus § 1 "dualisieren".

Vorab einige Informationen zu den im folgenden betrachteten signierten Maßen:

Ω sei eine beliebige offene und beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Mit $M(\Omega)$ bezeichnen wir die Menge aller signierten Radon-Maße μ auf Ω, deren totale Variation $|\mu|(\Omega)$ endlich ausfällt. Signiertes Radon-Maß heißt, daß es Radon-Maße μ^+,μ^- auf Ω gibt

mit $\mu = \mu^+ - \mu^-$. Die totale Variation eines signierten Radon-Maßes μ ist folgendermaßen definiert

$|\mu|(\Omega) := \inf\{\mu^+(\Omega)+\mu^-(\Omega): \mu^+,\mu^- \text{ sind Radon-Maße auf } \Omega \text{ mit } \mu = \mu^+ - \mu^-\}$.

$(M(\Omega), |\cdot|)$ ist ein normierter Raum, der in kanonischer Weise mit dem Dualraum zu $C_o^o(\Omega) := \{u \in C^o(\overline{\Omega}): u|_{\partial\Omega} = o\}$ identifiziert werden kann (wenn $C_o^o(\Omega)$ durch $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$ normiert wird), denn es gilt der

Darstellungssatz von Riesz: Die Abbildung $M(\Omega) \ni \mu \longmapsto T_\mu \in C_o^o(\Omega)^*$, $T_\mu(f) := \int_\Omega f\, d\mu$ für $f \in C_o^o(\Omega)$, ist ein isometrischer Isomorphismus.

Speziell gilt für die totale Variation von $\mu \in M(\Omega)$ die Formel

$|\mu|(\Omega) = \sup\{|\int_\Omega f\, d\mu|: f \in C_o^o(\Omega), \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \le 1\}$.

$\square$

Sei $N \in \mathbb{N}$ beliebig. T sei aus $C_o^o(\Omega,\mathbb{R}^N)^*$, also ein stetiges lineares Funktional auf den stetigen Funktionen $\overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$, die auf $\partial\Omega$ verschwinden. Definiert man $T^i \in C_o^o(\Omega)^*$ durch $T^i(f) := T(F)$ mit $F^j = \begin{cases} f \text{ für } j=i \\ o \text{ sonst} \end{cases}$, $j = 1,\dots,N$, so gilt $T(F) = T^i(F^i)$ für $F \in C_o^o(\Omega,\mathbb{R}^N)$, also $T(F) = \int_\Omega F^i\, d\mu^i$, wenn μ^i das zu T^i nach dem Darstellungssatz gehörende Element von $M(\Omega)$ ist. Daher ist $C_o^o(\Omega,\mathbb{R}^N)^*$ in kanonischer Weise isomorph zum Produktraum $M(\Omega)^N$. Wir nennen die Elemente $\mu := (\mu^1,\dots,\mu^N)$ von $M(\Omega)^N$ die vektorwertigen signierten Radon-Maße von endlicher totaler Variation $\|\mu\|(\Omega) := \sum_{i=1}^N |\mu^i|(\Omega)$. Für $F \in C_o^o(\Omega,\mathbb{R}^N)$ und $\mu \in M(\Omega)^N$ gilt offenbar $|\int_\Omega F^i\, d\mu^i| \le \|F\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^N)} \cdot \|\mu\|(\Omega)$.

Wir beschreiben jetzt die Einzelheiten der Dualisierungsmethode:

Die Voraussetzungen (2.2) seien erfüllt. Auf den Sobolev-Räumen $\overset{o}{H}{}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, $1 \le p < \infty$, wählen wir die nach Lemma 0.2 zur Standardnorm äquivalente Norm

$$\|u\|_{\overset{o}{H}{}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)} := \|\nabla u\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^{n\cdot N})},$$

um die in Lemma 0.5 (und den anschließenden Bemerkungen) festgestellte Isomorphie auszunutzen: Nach Lemma 0.5 gibt es für reelle Zahlen r mit $r \geq 2$ einen natürlichen isometrischen Isomorphismus $K_r : \overset{\circ}{H}{}^{1,r'}(\Omega,\mathbb{R}^N)^* \longrightarrow H^{-1,r}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, $r' := \frac{r}{r-1}$. Der duale Operator $K_r^* : H^{-1,r}(\Omega,\mathbb{R}^N)^* \longrightarrow \overset{\circ}{H}{}^{1,r'}(\Omega,\mathbb{R}^N)^{**}$ ist dann ebenfalls normerhaltend und bijektiv. Die Reflexivität des Sobolev-Raumes $\overset{\circ}{H}{}^{1,r'}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ schließlich ist gleichbedeutend mit der Surjektivität der isometrischen Einbettung $J_{r'} : \overset{\circ}{H}{}^{1,r'}(\Omega,\mathbb{R}^N) \longrightarrow \overset{\circ}{H}{}^{1,r'}(\Omega,\mathbb{R}^N)^{**}$, so daß wir durch $I_r := J_{r'}^{-1} \circ K_r^*$ einen isometrischen Isomorphismus $H^{-1,r}(\Omega,\mathbb{R}^N)^* \longrightarrow \overset{\circ}{H}{}^{1,r'}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ erhalten. Für $T \in H^{-1,r}(\Omega,\mathbb{R}^N)^*$ ist $I_r(T)$ per Definition die Funktion $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,r'}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ mit $(T \circ K_r)(\eta) = \eta(u)$ für alle $\eta \in \overset{\circ}{H}{}^{1,r'}(\Omega,\mathbb{R}^N)^*$. Wir verabreden, die Räume $\overset{\circ}{H}{}^{1,r'}(\Omega,\mathbb{R}^N)^*$ und $H^{-1,r}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ bzw. $H^{-1,r}(\Omega,\mathbb{R}^N)^*$ und $\overset{\circ}{H}{}^{1,r'}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ durch K_r bzw. I_r zu identifizieren.

Der Operator $S : H^{-1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N) \longrightarrow \overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ ordne $T \in H^{-1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ die eindeutig bestimmte Funktion $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ zu mit

(2.4) $\int_\Omega A_{\alpha\beta}^{ij} D_\alpha u^i D_\beta \Phi^j \, dx = T(\Phi)$ für alle $\Phi \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)$.

Wohldefiniertheit und Stetigkeit dieses "Lösungsoperators" zum transponierten System $L_{ij}^t u^j = T^i$, $i = 1,\ldots,N$, folgen aus (GV)III mit dem Lax-Milgram Theorem. Dem Dualisierungsprozeß liegt folgende Idee zugrunde: Die Sätze aus § 1 garantieren, daß S für Zahlen $p > n$ den Raum $H^{-1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ auf einen Teilraum von $C^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)$ abbildet. Durch Übergang zu den Dualräumen gewinnt man einen Operator, der linearen Funktionalen auf "gewissen stetigen Funktionen" Elemente des Raumes $H^{-1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)^* = \overset{\circ}{H}{}^{1,p'}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ zuordnet. Die linearen Funktionale erweisen sich gerade als die vektorwertigen Radon-Maße μ auf Ω von endlicher totaler Variation. Zu zeigen bleibt also, daß die in diesem Sinn zu μ gehörende Sobolev-Funktion schwache Lösung des Systems (2.1) ist.

Wir führen nun die einzelnen Schritte aus:

Für reelle Zahlen r,s mit $r \geq s \geq 1$ definieren wir die Einbettungen

$i_{rs} : \overset{o}{H}{}^{1,r}(\Omega,\mathbb{R}^N) \longrightarrow \overset{o}{H}{}^{1,s}(\Omega,\mathbb{R}^N)$

$j_{rs} : H^{-1,r}(\Omega,\mathbb{R}^N) \longrightarrow H^{-1,s}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, wenn $s \geq 2$.

Nach Lemma 0.1 (v) haben wir für $p \in \mathbb{R}$ mit $p > n$ die Einbettung

$h_p : \overset{o}{H}{}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N) \longrightarrow C_o^o(\Omega,\mathbb{R}^N)$,

denn die Funktionen u aus $\overset{o}{H}{}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ sind stetig bis zum Rand von Ω; zugleich findet man $\Phi_\nu \in C^\infty_{kpt}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, $\nu \in \mathbb{N}$, mit $\|u-\Phi_\nu\|_{H^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)} \xrightarrow{\nu\to\infty} 0$, was nach der Abschätzung aus Lemma 0.1 (v) gleichmäßige Konvergenz $\Phi_\nu \xrightarrow{\nu\to\infty} u$ auf $\overline{\Omega}$ bedeutet. Deshalb gilt $u|_{\partial\Omega} = 0$.

Schließlich setzen wir für $p \in \mathbb{R}$ mit $p > n$

$\Sigma_p : H^{-1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N) \longrightarrow \overset{o}{H}{}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, $\Sigma_p(T) := S(j_{p2}(T))$, $T \in H^{-1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$

$S_p : H^{-1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N) \longrightarrow C_o^o(\Omega,\mathbb{R}^N)$, $S_p := h_p \circ \Sigma_p$.

Die Regularitätssätze aus § 1 ergeben

Lemma 2.1: Die Voraussetzungen (2.2) seien erfüllt, p sei eine reelle Zahl >n. Dann sind die Operatoren Σ_p, S_p wohldefiniert und stetig. Ihre Norm wird abgeschätzt durch eine positive Konstante, die nur abhängt von n,N,λ,Λ,p,Ω und dem Stetigkeitsmodul der Koeffizienten.

Beweis: Für $T \in H^{-1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ ist $j_{p2}(T)$ definiert; $u := S(j_{p2}(T))$ liegt in $\overset{o}{H}{}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ und erfüllt die Integralrelation (2.4). Man stelle T durch ein L^p-Vektorfeld dar, also $T\eta = \int_\Omega F^i D_\alpha \eta^i \, dx$ für $\eta \in \overset{o}{H}{}^{1,p'}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ mit $F = (F^i_\alpha)_{\substack{1\le i\le N\\ 1\le\alpha\le n}} \in L^p(\Omega,\mathbb{R}^{n\,N})$.

Dann ist u schwache Lösung des transponierten Systems

$L^t_{ij} u^j = -D_\alpha F^i_\alpha$, $i = 1,\dots,N$, auf Ω ,

und da Satz 1 auch für das transponierte System gilt, folgt: $u \in H^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$. Aus Anmerkung 1) zu Korollar 1 von Seite 32 entnimmt man $u \in \overset{o}{H}{}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ mit der Abschätzung

$$|||u|||_{H^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)} \leq C \cdot \|F\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^{nN})} ,$$

wo die Konstante C von den im Lemma aufgezählten Parametern abhängt. Geht man auf der rechten Seite der Ungleichung über zum Infimum der L^p-Normen der T darstellenden Vektorfelder F, so hat man die den Operator Σ_p betreffenden Behauptungen verifiziert. Die Abschätzung für $\|S_p\|$ findet man im Korollar 1 zu Satz 1.

QED

Unter der Voraussetzung von Lemma 2.1 betrachten wir den dualen Operator zu S_p

$$S_p^* : C_o^o(\Omega,\mathbb{R}^N)^* \longrightarrow H^{-1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)^* = \overset{o}{H}{}^{1,p'}(\Omega,\mathbb{R}^N) , \quad p' := \frac{p}{p-1}$$

$$T \longmapsto T \circ S_p$$

Durch die Zuordnung $M(\Omega)^N \ni \mu \longmapsto T_\mu \in C_o^o(\Omega,\mathbb{R}^N)^*$, $T_\mu(f) := \int_\Omega f^i d\mu^i$, ist $C_o^o(\Omega,\mathbb{R}^N)$ isomorph zum Raum $M(\Omega)^N$. Lemma 2.1 ergibt folgende Abschätzung für die Funktion $S_p^*(\mu)$:

Lemma 2.2: Die Voraussetzungen (2.2) seien erfüllt. Dann gilt für jedes Element μ von $M(\Omega)^N$ und alle reellen $p > n$ die Abschätzung

(2.5) $$|||S_p^*(\mu)|||_{H^{1,p'}(\Omega,\mathbb{R}^N)} \leq C \cdot \|\mu\|(\Omega), \quad p' := \frac{p}{p-1} ,$$

wo die Konstante C abhängt von $n,N,\lambda,\Lambda,p,\Omega$ und dem Stetigkeitsmodul der Koeffizienten.

Beweis: Es ist $\|\|S_p^*(\mu)\|\|_{H^{1,p'}(\Omega,\mathbb{R}^N)} = \|S_p^*(\mu)\|_{H^{-1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)^*} =$

$\sup\{ S_p^*(\mu)(\eta) : \eta \in H^{-1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N), \|\eta\|_{H^{-1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)} \le 1\} =$

$\sup\{ T_\mu(S_p(\eta)) : \eta \in H^{-1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N), \|\eta\|_{H^{-1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)} \le 1\} =$

$\sup\{ \int_\Omega S_p(\eta)^i \cdot d\mu^i : \eta \in H^{-1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N), \|\eta\|_{H^{-1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)} \le 1\} \le$

$\sup\{\|S_p(\eta)\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^N)} : \eta \in H^{-1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N), \|\eta\|_{H^{-1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)} \le 1\} \cdot \|\mu\|(\Omega) \le$

$\|S_p\| \cdot \|\mu\|(\Omega)$.

QED

Wir zeigen jetzt, daß $S_p^*(\mu)$ für alle $p \in \mathbb{R}$ mit $p > n$ dieselbe Funktion in $\overset{\circ}{H}{}^{1,1}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ ergibt. Seien dazu $p,q \in \mathbb{R}$ mit $q > p > n$ fixiert. Dann gelten unter den Voraussetzungen (2.2) die Identitäten

(i) $\Sigma_p \circ j_{qp} = i_{qp} \circ \Sigma_q$

(ii) $h_p \circ i_{qp} = h_q$

(iii) $S_p = h_p \circ \Sigma_p$, $S_q = h_q \circ \Sigma_q$

(iv) $j_{qp}^* = i_{p'q'}$

(i)-(iii) sind trivial, bei (iv) betonen wir nochmals die Verabredung von Seite 56: Für $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,p'}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ erfüllt $v := j_{qp}^* u \in H^{1,q'}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ per Definition $(j_{qp}\psi)u = \psi v$ für alle $\psi \in H^{-1,q}(\Omega,\mathbb{R}^N) = \overset{\circ}{H}{}^{1,q'}(\Omega,\mathbb{R}^N)^*$ oder äquivalent $\psi(i_{p'q'}u) = \psi v$, und der Satz von Hahn-Banach ([12]) liefert $i_{p'q'}u = v$.
Setzen wir (i)-(iv) zusammen, so folgt

(2.6) $S_q^* = i_{p'q'} \circ S_p^*$.

Die Beziehung (2.6) erlaubt folgende Interpretation:

Lemma 2.3: Die Voraussetzungen (2.2) seien erfüllt, μ sei aus $M(\Omega)^N$. Dann gilt $S_q^*(\mu) = S_p^*(\mu)$ in $\overset{\circ}{H}{}^{1,r}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, $r := \min\{\frac{p}{p-1}, \frac{q}{q-1}\}$ für alle reellen Zahlen p,q mit $p,q \geq n$. Anders gesagt: Die $S_p^*(\mu)$, $p > n$, ergeben eine Sobolev-Funktion $u_\mu \in \overset{\circ}{H}{}^{1,1}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, die in jedem Raum $\overset{\circ}{H}{}^{1,s}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ für reelle s mit $1 \leq s < \frac{n}{n-1}$ enthalten ist. |_|

Fassen wir unsere bisher angestellten Überlegungen zusammen, so ergibt sich der eingangs genannte Existenz- und Eindeutigkeitssatz für schwache Lösungen des Systems (2.1):

Satz 3: Die Voraussetzungen (2.2) seien erfüllt, $\mu = (\mu^1,\ldots,\mu^N)$ sei aus $M(\Omega)^N$, also ein vektorwertiges signiertes Radon-Maß endlich totaler Variation auf Ω. Dann gilt:

(i) Die in Lemma 2.3 definierte Funktion $u_\mu \in \bigcap_{1\leq r<\frac{n}{n-1}} \overset{\circ}{H}{}^{1,r}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ ist schwache Lösung des Systems (2.1) $L_{ij}\, u^j = \mu^i$, $i = 1,\ldots,N$, auf Ω.

(ii) Für alle reellen r mit $1 \leq r < \frac{n}{n-1}$ gilt die Abschätzung

(2.7) $\|u_\mu\|_{H^{1,r}(\Omega,\mathbb{R}^N)} \leq C \cdot \|\mu\|(\Omega)$,

wo die Konstante C abhängt von $n,N,\lambda,\Lambda,r,\Omega$ und dem Stetigkeitsmodul der Koeffizienten.

(iii) Ist $v \in \overset{\circ}{H}{}^{1,1+\varepsilon}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ für ein $\varepsilon > 0$ und ebenfalls schwache Lösung von (2.1), so gilt $v = u_\mu$.

Beweis: (iii) folgt aus Korollar 2 zu Satz 1.

(ii) Ist $r \in \mathbb{R}$ vorgegeben mit $1 < r < \frac{n}{n-1}$, so setzt man $p := \frac{r}{r-1} (> n)$ und benutzt die Abschätzung (2.5) aus Lemma 2.2, wobei die Äquivalenz der Normen $|||\cdot|||_{H^{1,r}(\Omega,\mathbb{R}^N)}$ und $\|\cdot\|_{H^{1,r}(\Omega,\mathbb{R}^N)}$ auf $\overset{\circ}{H}{}^{1,r}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ zu berücksichtigen ist.

(i) Sei $\psi \in C^\infty_{kpt}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ beliebig. Für alle reellen p mit $p > n$ liegt die Distribution $T\,\Phi := \int_\Omega A^{ij}_{\alpha\beta}\, D_\alpha \psi^i\, D_\beta \Phi^j \, dx$ im Raum $H^{-1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ mit $S_p(T) = \psi$.

Es folgt: $\int_\Omega \psi^i d\mu^i = \int_\Omega S_p(T)^i d\mu^i = \langle \mu, S_p(T) \rangle =$

$$S_p^*(\mu)(T) \underset{(+)}{=} T\, u_\mu = \int_\Omega A^{ij}_{\alpha\beta}\, D_\alpha \psi^i\, D_\beta u^j_\mu \, dx$$

Hierin bedeutet $\langle \mu, S_p(T) \rangle$ Anwendung von $\mu \in C^o_o(\Omega,\mathbb{R}^N)^*$ auf die Funktion $S_p(T)$. An der mit (+) gekennzeichneten Stelle benutzen wir die Identifikation $H^{-1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)^* = \overset{\circ}{H}{}^{1,p'}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ und die Tatsache, daß u_μ definitionsgemäß im Raum $\overset{\circ}{H}{}^{1,p'}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ mit der Funktion $S_p^*(\mu)$ zusammenfällt.

Da ψ ein beliebiger Testvektor war, haben wir die Integralrelation (2.3) verifiziert.

QED

Definition: Unter den Voraussetzungen (2.2) verstehen wir unter der schwachen Lösung des Systems (2.1) $L_{ij} u^j = \mu^i$, $i = 1,\ldots,N$ auf Ω bei vorgegebenem vektorwertigen signierten Radon-Maß $\mu = (\mu^1,\ldots,\mu^N) \in M(\Omega)^N$ stets die in Satz 3 festgelegte Funktion $u_\mu \in \bigcap_{1 \le r < \frac{n}{n-1}} \overset{\circ}{H}{}^{1,r}(\Omega,\mathbb{R}^N)$.

Bevor wir mit den hier gewonnenen Resultaten die Greensche Matrix einführen, notieren wir noch einen Approximationssatz.

Lemma 2.4: Unter den Voraussetzungen (2.2) seien μ_m, μ aus $M(\Omega)^N$, $m\in\mathbb{N}$, mit $\int_\Omega f^i d\mu_m^i \xrightarrow[m\to\infty]{} \int_\Omega f^i d\mu^i$ für alle Funktionen $f\in C_o^o(\Omega,\mathbb{R}^N)$. Dann gilt für die zugehörigen Lösungen u_m und u von (2.1) $u_m \xrightarrow{m\to\infty} u$ in $\mathring{H}^{1,r}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ für alle reellen r mit $1<r<\frac{n}{n-1}$.

Anmerkung: Das Symbol "$\longrightarrow$" meint schwache Konvergenz, vgl.[12], §13.

Beweis: Die Voraussetzung an die Maße bedeutet $\mu_m^i \overset{*}{\rightharpoonup} \mu^i$ bei $m\to\infty$ (schwach-*-Konvergenz,[12],Lemma 13.8) im Raum $C_o^o(\Omega)^*$ für $i=1,\dots,N$. Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit ([12],Satz 8.1) ergibt die Existenz von Konstanten $C_i\in\mathbb{R}$ mit $|\mu_m^i|(\Omega)\le C_i$ für alle $m\in\mathbb{N}$ und $i=1,\dots,N$. Deshalb fällt $\sup\{\|\mu_m\|(\Omega): m\in\mathbb{N}\}$ endlich aus, und die Abschätzung (2.7) liefert bei festem $r\in\mathbb{R}$ mit $1<r<\frac{n}{n-1}$ Beschränktheit von $\|u_m\|_{H^{1,r}(\Omega,\mathbb{R}^N)}$. Wir können daher eine in $\mathring{H}^{1,r}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ schwach konvergente Teilfolge von $\{u_m\}$ wählen ([12],Satz 14.9), deren Limes v das System $L_{ij}v^j=\mu^i$, $i=1,\dots,N$, auf Ω schwach löst. Satz (iii) ergibt $v=u$, was aber trivialerweise $u_m\longrightarrow u$ bei $m\to\infty$ in $\mathring{H}^{1,r}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ impliziert.

Q E D

Wir beschließen diesen Paragraphen mit der Bemerkung, daß alle hier bewiesenen Resultate natürlich auch dann gelten, wenn man statt des Systems $L_{ij}u^j=\mu^i$, $i=1,\dots,N$, das transponierte System $L_{ij}^t u^j=\mu^i$, $i=1,\dots,N$, mit den in (GV)II definierten Operatoren L_{ij}^t betrachtet.

§ 3 Definition und erste Eigenschaften der Green-Matrix

Ausgehend von Satz 3 des vorigen Paragraphen definieren wir hier die Greensche Matrix $G : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}^{N^2}$ für die Matrix $(L_{ij})_{1\le i,j\le N}$ von Differentialoperatoren aus (GV)II von Seite 28. Mit Lemma 2.4 approximieren wir G durch "gemittelte Greensche Matrizen" und können dadurch gewisse Symmetrieeigenschaften von G beweisen (Satz 4) sowie die Aussage, daß G als Funktion von zwei Variablen $(x,y) \in \Omega \times \Omega$ stetig ist auf $(\Omega \times \Omega) - \{(x,x) : x \in \Omega\}$. (Satz 5). Als erste Anwendung erhalten wir eine Darstellungsformel für die schwache Lösung u mit Nullrandwerten des Systems $L_{ij}u^j = \left\{ \begin{matrix} f^i - D_\alpha F^i_\alpha \\ \mu^i \end{matrix} \right\}$, $i = 1,..,N$, auf Ω, wo die Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$, $F : \Omega \to \mathbb{R}^{nN}$ bzw. das vektorwertige Maß μ vorgegeben sind: u ist das mit dem "Kern" G und der rechten Seite des Systems gebildete Potential.

Wir verabreden die Standardvoraussetzungen an die Koeffizienten des Systems, das Gebiet Ω und die Raumdimension:

(3.1) es gelte (GV) von Seite 28 mit $n \ge 3$ sowie $A^{ij}_{\alpha\beta} \in C^0(\overline{\Omega})$, $i,j = 1,..,N$, $\alpha,\beta = 1,..,n$

Definition: Die Voraussetzungen (3.1) seien erfüllt. (i) Für $y \in \Omega$ und $k \in \{1,..,N\}$ betrachten wir das vektorwertige Radon-Maß aus $M(\Omega)^N$ mit den Komponenten $\delta_{ik} \cdot \delta_y$ für $i = 1,..,N$, wo δ_y das Dirac-Maß zu y ist, also $\delta_y(A) := \left\{ \begin{matrix} 0 \text{ für } y \notin A \\ 1 \text{ für } y \in A \end{matrix} \right\}$, $A \subset \Omega$. Mit $G_k(\cdot,y) = (G^i_k(\cdot,y))_{1\le i\le N}$ bezeichnen wir die Lösung (im Sinne der Definition von

Seite 61) des Systems $L_{ij}u^j = \delta_{ik}\,\delta_y$, $i = 1,..,N$, auf Ω. Nach Korollar 1 zu Satz 2 ist $G_k(\cdot,y)$ stetig auf $\Omega\setminus\{y\}$, also punktweise definiert. Die durch

$G : \Omega \times \Omega \ni (x,y) \to G(x,y) := (G_k^i(\cdot,y)(x))_{1\le i,k\le N} \in \mathbb{R}^{N^2}$

$L^n \times L^n$-fast überall auf $\Omega \times \Omega$ erklärte Abbildung heißt Greensche Matrix auf Ω zur Differentialoperatormatrix $(L_{ij})_{1\le i,j\le N}$.

(ii) Seien $y \in \Omega$ und $0 < \rho < \operatorname{dist}(y,\partial\Omega)$. $\mu \in M(\Omega)$ sei das Lebesgue-Maß auf Ω versehen mit der Gewichtsfunktion $\frac{1}{|B_\rho(y)|} \cdot \chi_{B_\rho(y)}$, wo $\chi_{B_\rho(y)}$ die charakteristische Funktion der Kugel $B_\rho(y)$ ist. Für $k = 1,..,N$ sei $G_k^\rho(\cdot,y)$ die Lösung (entsprechend der Definition von Seite 61) des Systems $L_{ij}u^j = \delta_{ik}\mu$, $i = 1,..,N$. $G^\rho(\cdot,y) := (G_k^{\rho i}(\cdot,y)_{1\le i,k\le N})$ heißt die im Punkt $y\in\Omega$ mit Radius ρ gemittelte Greensche Matrix.

Die allgemeinen Resultate des vorigen Paragraphen ergeben im hier vorliegenden Spezialfall

Lemma 3.1: (3.1) sei erfüllt. Für alle $y \in \Omega$ und $0 < \rho < \operatorname{dist}(y,\partial\Omega)$ gilt

(i) $G(\cdot,y) \in \bigcap_{1\le r<\infty} H^{1,r}_{loc}(\Omega-\{y\},\mathbb{R}^{N^2}) \cap \bigcap_{1\le s<\frac{n}{n-1}} \overset{o}{H}{}^{1,s}(\Omega,\mathbb{R}^{N^2})$,

insbesondere ist $G(\cdot,y)$ stetig auf $\Omega - \{y\}$.

(ii) $G^\rho(\cdot,y) \in \bigcap_{1\le r<\infty} \overset{o}{H}{}^{1,r}(\Omega,\mathbb{R}^{N^2})$, speziell hat man Stetigkeit von $G^\rho(\cdot,y)$ auf $\overline{\Omega}$.

(iii) Zu jedem reellen p mit $1 \le p < \frac{n}{n-1}$ gibt es eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, die nur von $n,N,\lambda,\Lambda,p,\Omega$ und dem Stetigkeitsmodul der Koeffizienten abhängt, mit

$$\|G(\cdot,y)\|_{H^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^{N^2})}\ ,\ \|G^\rho(\cdot,y)\|_{H^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^{N^2})} \leq C.$$

(C hängt weder von y noch von ρ ab!)

(iv) Für $p \in \mathbb{R}$ mit $1 \leq p < \frac{n}{n-1}$ gilt: $G^\rho(\cdot,y) \xrightarrow[\rho \downarrow o]{} G(\cdot,y)$ (schwache Konvergenz) im Sobolev-Raum $\overset{o}{H}{}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^{N^2})$.

Beweis: (i) Korollar 1 zu Satz 2 und Satz 3; (ii) folgt aus Satz 1, da das in der Definition von $G_k^\rho(\cdot,y)$ auftretende Maß μ absolut-stetig ist bzgl. des Lebesgue-Maßes L^n auf Ω mit Gewichtsfunktion aus $L^\infty(\Omega)$; (iii) ist Abschätzung (2.7) aus Satz 3 (die hier vorliegenden vektorwertigen Maße haben die totale Variation 1); iv) folgt sofort aus Lemma 2.4. □

Für den Beweis des nachfolgenden Satz 4 benötigen wir Informationen über das Stetigkeitsverhalten der gemittelten Green-Matrix $G^\rho(\cdot,y)$ auf $\Omega - \{y\}$.

Lemma 3.2: (3.1) sei erfüllt. y sei aus Ω und für $R > o$ gelte: $B_R(y)$ ist kompakt in Ω enthalten. Dann sind für $o < \rho < R$ die Funktionen $G^\rho(\cdot,y)$ auf jedem Teilgebiet $D \subset\subset \Omega - \overline{B}_R(y)$ Hölder-stetig zu jedem Exponent $\alpha \in]o,1[$. Die α-Hölder-Konstante von $G^\rho(\cdot,y)$ auf D ist unabhängig von ρ, sie wird allein bestimmt durch die Parameter $n,N,\lambda,\Lambda,\alpha$, die Geometrie der Gebiete $D,\Omega,\Omega - \overline{B}_R(y)$ und den Stetigkeitsmodul der Koeffizienten.

Bemerkung: Für offene Teilmengen O_1,O_2 des $\mathbb{R}^n$ bedeutet die Notation $O_1 \subset\subset O_2$, daß $\overline{O}_1$ eine kompakte Menge ist und zudem noch in O_2 liegt.

Beweis: Sei D' ein Lipschitz-Gebiet mit $D \subset\subset D' \subset\subset \Omega - B_R(y)$. Bei vorgegebenem $\alpha \in]o,1[$ seien $p := \frac{n}{n-\alpha}$, $q := \frac{n}{1-\alpha}$. Die Zahl p liegt im Intervall $]1,\frac{n}{n-1}[$, und der (n-1)-fach iterierte Sobolev-Exponent $\frac{np}{n-(n-1)p}$ zu p ist gerade q. Für $k = 1,..,N$ löst $G_k^\rho(\cdot,y)$ auf D' das homogene System $L_{ij}u^j \equiv o$; wählen wir also R_o wie in Korollar 2 zu Satz 2 und setzen $r := \min(R_o, \frac{1}{2}\mathrm{dist}(D,\partial D'))$, so gilt für alle Punkte $x \in D$ nach der Abschätzung (1.12):

$$*\|G^\rho(\cdot,y)\|_{H^{1,q}(B_r(x),\mathbb{R}^{N^2})} \leq C\, r^{1-n} *\|G^\rho(\cdot,y)\|_{H^{1,p}(B_{2r}(x),\mathbb{R}^{N^2})}$$

mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$, die nur von $n,N,\lambda,\Lambda,\alpha$ abhängt. Ein Überdeckungsargument in Verbindung mit Lemma 3.1 (iii) ergibt:

$$\|G^\rho(\cdot,y)\|_{H^{1,q}(D,\mathbb{R}^{N^2})} \leq \tilde{C}(n,N,\lambda,\Lambda,\alpha,D,\Omega,R,y,\text{ Stetigkeitsmodul der Koeffizienten})$$

Da $\tilde{C}$ nicht von ρ abhängt, folgt die Behauptung nach [18], Thm. 3.6.6.

Q E D

Mit Hilfe von Lemma 3.2 können wir jetzt gewisse Symmetrieeigenschaften der Green-Matrix G beweisen. Nachfolgend bezeichnen wir mit dem Symbol ${}^tG$ die Greensche Matrix auf Ω für die in (GV)II erklärte Differentialoperator-Matrix $(L^t_{ij})_{1\leq i,j\leq N}$. (Man ersetzt in der Definition von G die Differentialoperatoren L_{ij} durch L^t_{ij} und benutzt, daß der Existenzsatz aus §2 auch für das transponierte System richtig ist.) Die im Punkt $y \in \Omega$ mit Radius $o < \rho < \mathrm{dist}(y,\partial\Omega)$ gemittelte Matrix ${}^tG^\rho(\cdot,y)$ wird entsprechend eingeführt.

Satz 4: Unter den Voraussetzungen (3.1) gilt für alle Punkte $x,y \in \Omega$ die Beziehung $G(x,y) = ({}^tG(y,x))^T$, wo $({}^tG(y,x))^T$ die zur (N×N)-Matrix ${}^tG(y,x)$ transponierte Matrix bezeichnet,

also $G_k^l(x,y) = {}^tG_l^k(y,x)$ für $k,l = 1,..,N$.

Korollar 1: Für symmetrische Koeffizienten $A_{\alpha\beta}^{ij} = A_{\beta\alpha}^{ji}$, $i,j = 1,..,N$, $\alpha,\beta = 1,..,n$ ist $G(x,y) = (G(y,x))^T$ in allen Punkten $x,y \in \Omega$.

Korollar 2: Für Punkte $x,y \in \Omega$ und reelle Zahlen ρ mit $0 < \rho < \operatorname{dist}(y,\partial\Omega)$ ist

$$G^\rho(x,y) = \fint_{B_\rho(y)} ({}^tG(z,x))^T dz = \fint_{B_\rho(y)} G(x,z)dz.$$

Anmerkungen: 1) Da die Funktion ${}^tG(\cdot,x)$ bei festem $x \in \Omega$ meßbar ist bzgl. des Lebesgue-Maßes L^n auf Ω, ergibt die Formel aus Satz 4 L^n-Meßbarkeit von $G(x,\cdot)$, was a priori nicht klar ist.
2) Korollar 2 rechtfertigt offenbar die Bezeichnung gemittelte Greensche Matrix für $G^\rho(\cdot,y)$.

Beweis des Satzes: Seien $x \neq y$ Punkte aus Ω; wir wählen positive Nullfolgen $\{\rho_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$, $\{\sigma_\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft

(3.2) $G^{\rho_\nu}(\cdot,y) \xrightarrow{\nu\to\infty} G(\cdot,y)$, ${}^tG^{\sigma_\mu}(\cdot,x) \xrightarrow{\mu\to\infty} {}^tG(\cdot,x)$ punktweise fast überall auf Ω. Die Existenz solcher Folgen ergibt sich aus Lemma 3.1 (iv) mit dem Rellich-Theorem (z.B. [8], Thm. 7.22). Nachfolgend setzen wir zur Abkürzung $G^\nu := G^{\rho_\nu}(\cdot,y)$, ${}^tG^\mu := {}^tG^{\sigma_\mu}(\cdot,x)$. Per Definition gilt für $k,l = 1,..,N$ und $\eta \in \overset{o}{H}{}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)$

(3.3)

$$\text{(i)} \quad \int_\Omega A_{\alpha\beta}^{ij} D_\alpha \eta^i D_\beta G_k^{\nu j} dz = \fint_{B_{\rho_\nu}(y)} \eta^k dz$$

$$\text{(ii)} \quad \int_\Omega A_{\alpha\beta}^{ij} D_\alpha {}^tG_l^{\mu i} D_\beta \eta^j dz = \fint_{B_{\sigma_\mu}(x)} \eta^l dz$$

Test von (3.3) (i) bzw. (ii) mit ${}^tG_l^\mu$ bzw. G_k^ν ergibt die Identität

(3.4) $a_{\nu\mu}^{kl} := \fint_{B_{\rho_\nu}(y)} {}^tG_l^{\mu k}\, dz = \fint_{B_{\sigma_\mu}(x)} G_k^{\nu l}\, dz$

Gemäß ${}^tG^\mu \xrightarrow{\mu\to\infty} {}^tG := {}^tG(\cdot,x)$ in allen Sobolev-Räumen $\overset{o}{H}{}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^{N^2})$ mit $1 < p < \frac{n}{n-1}$ kann man im ersten Integral aus (3.4) den Limes $\mu\to\infty$ unter das Integral ziehen und erhält wegen der Stetigkeit von G^ν in x die Gleichung

(3.5) $G_k^{\nu l}(x) = \fint_{B_{\rho_\nu}(y)} {}^tG_l^k\, dz.$

Die rechte Seite von (3.5) liefert bei $\nu\to\infty$ den Wert ${}^tG_l^k(y)$, es folgt

(3.6)
(i) ${}^tG_l^k(y) = \lim_{\nu\to\infty} (\lim_{\mu\to\infty} a_{\nu\mu}^{kl})$ und analog

(ii) $G_k^l(x) = \lim_{\mu\to\infty} (\lim_{\nu\to\infty} a_{\nu\mu}^{kl})$

(3.6) ergibt die behauptete Beziehung, wenn man gleichmäßige Konvergenz von $a_{\nu\mu}^{kl}$ bzgl. ν bei $\mu\to\infty$ beweisen kann. Um das zu sehen, fixieren wir ein $R > 0$ mit $R < |x-y|$. Nach Lemma 3.2 (entsprechend für ${}^tG$ formuliert) gilt bei festgewähltem $\alpha \in]0,1[$ ${}^tG^\mu \in C^{0,\alpha}(\overline{B}_{\frac{R}{2}}(y),\mathbb{R}^{N^2})$ mit α-Hölder-Konstante unabhängig von μ (für $\mu \in \mathbb{N}$ groß genug). Mit demselben Argument wie in Lemma 3.2 kann man auch $\|{}^tG^\mu\|_{L^\infty(\overline{B}_{\frac{R}{2}}(y),\mathbb{R}^{N^2})}$ unabhängig von μ beschränken,

folglich hat $\{{}^tG^\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge, die auf $\overline{B_{\frac{R}{2}}}(y)$ gleichmäßig konvergiert (Satz von Arcela-Ascoli), aus (3.2) schließen wir:

${}^tG^\mu \xrightarrow{\mu\to\infty} {}^tG$ gleichmäßig auf $\overline{B_{\frac{R}{2}}}(y)$.

Das liefert mit der Abschätzung

$$\left| \fint_{B_{\rho_\nu}(y)} {}^tG^\mu \, dz - \fint_{B_{\rho_\nu}(y)} {}^tG \, dz \right| \le \sup_{\overline{B}_{\frac{R}{2}}(y)} \left| {}^tG^\mu - {}^tG \right|$$

die noch ausstehende Aussage. Mithin können wir in (3.6) die Grenzübergänge vertauschen.

QED

Korollar 1 ist trivial, da dann $G = {}^tG$ gilt. Zum Beweis von Korollar 2 ersetze man im Beweis des Satzes ρ_ν durch ein festes $\rho > 0$, (3.5) ergibt die erste Gleichung, die zweite Gleichung folgt nach Satz 4.

□

Über die Regularität der Green-Matrix als Funktion $G : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}^{N^2}$ von zwei Variablen kann man die folgende Aussage machen:

Satz 5: Unter den Voraussetzungen (3.1) ist die Green-Matrix auf der Menge $(\Omega \times \Omega) - \{(x,x) : x \in \Omega\}$ lokal Hölder-stetig zu jedem Exponent $\alpha \in]0,1[$.

Beweis: Bei gegebenem $\alpha \in]0,1[$ seien $p := \frac{n}{n-\alpha}$ und $q := \frac{np}{n-(n-1)p} = \frac{n}{1-\alpha}$. $x \neq y$ seien zwei Punkte aus Ω, $r \in \mathbb{R}^+$ erfülle

(i) $r \le \frac{1}{4}|x-y|$, $B_{2r}(x) \subset\subset \Omega$ und $B_{2r}(y) \subset\subset \Omega$,

was insbesondere $x' \neq y'$ für alle $x' \in B_r(x)$, $y' \in B_r(y)$ bedeutet. Mit $\rho := \max(|x-x'|, |y-y'|)$ gilt für $(x',y') \in B_r(x) \times B_r(y)$ nach Satz 4 und den zugehörigen Korollaren:

$$|G^\rho(x',y') - G^\rho(x,y)| \le |G^\rho(x',y') - G^\rho(x,y')| + |G^\rho(x,y') - G^\rho(x,y)| \le$$

$$\fint_{B_\rho(y')} |{}^tG(u,x') - {}^tG(u,x)| \, du + \left| \fint_{B_\rho(y')} {}^tG(u,x) \, du - \fint_{B_\rho(y)} {}^tG(u,x) \, du \right| \le$$

$$\fint_{B_\rho(y')} |G(x',u)-G(x,u)|\,du + \fint_{B_\rho(y')} |{}^tG(u,x) - {}^tG(y,x)|\,du + \fint_{B_\rho(y)} |{}^tG(u,x)-{}^tG(y,x)|\,du$$

$=: a + b + c.$

In Korollar 2 zu Satz 2 wurde folgende Aussage bewiesen:
Man findet Konstanten C, R_o abhängig von den in Korollar 2 zu Satz 2 aufgezählten Parametern, so daß für alle Punkte $x_o \in \Omega$, alle Radien R mit $o < R < \min(\frac{1}{2}\mathrm{dist}(x_o, \partial\Omega), R_o)$ und alle Funktionen $\varphi \in H^{1,p}(B_{2R}(x_o), \mathbb{R}^N)$, die auf $B_{2R}(x_o)$ das homogene System $L_{ij}\varphi^j \equiv o$ (oder $L^t_{ij}\varphi^j \equiv o$) lösen, die nachstehende Abschätzung gilt:

$$*\|\varphi\|_{H^{1,q}(B_R(x_o)\mathbb{R}^N)} \le CR^{1-n}.*\|\varphi\|_{H^{1,p}(B_{2R}(x_o),\mathbb{R}^N)} \Rightarrow \quad ([18], \text{Thm.3.3.3, oder Lemma O.3})$$

$$\underline{(3.7)}\quad |\varphi|_{C^{o,\alpha}(\bar{B}_R(x_o),\mathbb{R}^N)} := \sup_{z_1,z_2 \in \bar{B}_R(x_o)} \frac{|\varphi(z_1)-\varphi(z_2)|}{|z_1-z_2|^\alpha} \le C(R)\ \|\varphi\|_{H^{1,p}(B_{2R}(x_o),\mathbb{R}^N)},$$

wo die Konstante C(R) bestimmt wird von R und die in C eingehenden Größen.

Neben (i) verlangen wir von r noch zusätzlich (ii) $r \le \frac{1}{2}R_o$.
Dann gilt (3.7) mit der Wahl $R := r$, $x_o := x$ und $\varphi := G_k(\cdot,u)$, wenn k aus $\mathbb{N}$ ist mit $1 \le k \le N$, und u irgendeinen Punkt aus $B_\rho(y')$ bezeichnet. Benutzt man zur Abschätzung von $\|G_k(\cdot,u)\|_{H^{1,p}(B_{2r}(x),\mathbb{R}^N)}$ die globale Ungleichung aus Lemma 3.1 (iii), so folgt
$a \le K(r)\ |x - x'|^\alpha \le K(r)\rho^\alpha$
Die Konstante K(r) hängt ab von $n, N, \lambda, \Lambda, \alpha, \Omega$, dem Stetigkeitsmodul der Koeffizienten und von r. Dasselbe Argument führt zur entsprechenden Abschätzung der Integrale b,c:
Im Integral b integriert man zunächst über die Kugel $B_{2\rho}(y)$ statt

$B_\rho(y')$ und wendet dann (3.7) an mit $R:=2r$, $x_o:=y$, $\varphi:={}^tG_k(\cdot,x)$, wo $k=1,\dots,N$ beliebig ist; es folgt: $b \leq K(r)\rho^\alpha$ und analog $c \leq K(r)\rho^\alpha$, also zusammen:

(3.8) $\quad |G(x',y') - G^\rho(x,y)| \leq K(r)\rho^\alpha$

Schreibt man jetzt

$$|G(x',y') - G(x,y)| \leq |G(x',y') - G^\rho(x',y')| + |G^\rho(x',y') - G^\rho(x,y)| + |G^\rho(x,y) - G(x,y)|$$

und beachtet wie eben die Abschätzungen

$$|G^\rho(x,y) - G(x,y)| \leq \fint_{B_\rho(y)} |{}^tG(u,x) - {}^tG(y,x)|\,du \leq K(r)\rho^\alpha$$

$$|G(x',y') - G^\rho(x',y')| \leq \fint_{B_\rho(y')} |{}^tG(u,x') - {}^tG(y',x')|\,du \leq K(r)\rho^\alpha,$$

so erhält man mit (3.8) die Ungleichung

$|G(x',y') - G(x,y)| \leq K(r)\max(|x-y'|,|y-y'|)^\alpha$ für alle Punkte $(x',y') \in B_r(x) \times B_r(y)$, also α-Hölder-Stetigkeit von G auf $B_r(x) \times B_r(y)$.

Q E D

In Lemma 3.1 (i) wurde $G(\cdot,y) \in H^{1,r}_{loc}(\Omega-\{y\},\mathbb{R}^{N^2})$ für alle reellen $r>1$ festgestellt. Diese Aussage soll nun dahingehend verbessert werden, daß die Regularität von $G(\cdot,y)$ nur in der Nähe des singulären Punktes y abnimmt.

Lemma 3.3: Unter den Voraussetzungen (3.1) gilt für alle Punkte $y\in\Omega$, alle reellen r mit $o<r<\operatorname{dist}(y,\partial\Omega)$ und alle reellen Exponenten $q\geq 1$ $\quad G(\cdot,y) \in H^{1,q}(\Omega-\overline{B}_r(y),\mathbb{R}^{N^2})$.

Beweis: Ohne Einschränkung gelte $q \geq \frac{1}{n-1}$, sonst ist nach Lemma 3.1 nichts zu zeigen. Die offene Menge $D := \Omega-\overline{B}_r(y)$ ist offenbar ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Wir fixieren $k \in \{1,\dots,N\}$ und erhalten aus Lemma 3.1 die Information $u := G_k(\cdot,y) \in \overset{o}{H}{}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ für jeden Expo-

menten $p\in\mathbb{R}$ mit $1<p<\frac{n}{n-1}$; ein solches p sei fest gewählt. η sei aus $C^{\infty}_{kpt}(\Omega)$ mit $\eta = 1$ auf der Kugel $B_{r+\varepsilon}(y)$, wo $\varepsilon > 0$ so eingerichtet wird, daß $B_{r+\varepsilon}(y) \subset\subset \Omega$ erfüllt ist. Dann folgt mit $\varphi := \eta u$

$L_{ij}u^j = 0$ auf D, $u-\varphi\in\overset{\circ}{H}{}^{1,p}(D,\mathbb{R}^N)$.

Gemäß Lemma 3.1 (i) gilt $\varphi\in H^{1,q}(D,\mathbb{R}^N)$, Satz 1 (angewendet auf D statt Ω) impliziert $u\in H^{1,q}(D,\mathbb{R}^N)$.

Q E D

Anmerkung: Die Abschätzung (1.3) aus Satz 1 liefert hier

$$\|u\|_{H^{1,q}(D,\mathbb{R}^N)} \leq C(D)\{\|u\|_{L^1(D,\mathbb{R}^N)} + \|\varphi\|_{H^{1,q}(D,\mathbb{R}^N)}\},$$

wo C(D) die Konstante aus Satz 1 bezeichnet mit Ω ersetzt durch D. Die L^1-Norm von u wird in Lemma 3.1 (iii) durch eine Konstante abgeschätzt, wir suchen jetzt eine Schranke für $\|\varphi\|_{H^{1,q}(D,\mathbb{R}^N)}$: Dazu sei o.E. $q>n$. Wir setzen $p := \frac{nq}{n+(n-1)q} \in \left]1,\frac{n}{n-1}\right[$; q ist dann gerade der (n-1)-fach iterierte Sobolev-Exponent zu p. Zur Abschätzung von $\|\varphi\|_{H^{1,q}(D,\mathbb{R}^N)}$ genügt es, die L^q-Normen von u und ∇u über der kompakten Menge $K := \mathrm{spt}(\eta)-\bar{B}_r(y)$ zu betrachten ($\mathrm{spt}(\eta) := \{ x\in\mathbb{R}^n : \eta(x) \neq 0\}$). Die Kompaktheit von K ergibt die Existenz einer Überdeckung durch Kugeln $B_1,\ldots,B_m$ mit der Eigenschaft, daß die konzentrischen Kugeln B_i' mit doppeltem Radius der B_i, i=1,...,m, noch ganz in $\Omega-\{y\}$ enthalten sind. Ferner kann man die Radien der Kugeln so klein wählen, daß die Ungleichung (1.12) aus Korollar 2 zu Satz 2 mit den oben definierten Exponenten p und q auf jedem Kugelpaar B_i, B_i', i=1,...,m, erfüllt ist. Mit (1.12) und Lemma 3.1 (iii) erhalten wir insgesamt die Aussage:

Unter den Voraussetzungen von Lemma 3.3 gibt es eine Konstante C aus $\mathbb{R}$ abhängig von $n,N,\lambda,\Lambda,\Omega,q,r,y$ und dem Stetigkeitsmodul der Koeffizienten mit $\|G(\cdot,y)\|_{H^{1,q}(\Omega-\bar{B}_r(y),\mathbb{R}^{N^2})} \leq C.$

□

Wir beschließen die Untersuchung der Eigenschaften der Green-Matrix

mit einer Bemerkung zum "skalaren Fall" N=1: In dieser Situation beweisen Grüter, Widman die Existenz einer Green-Funktion g für den skalaren Operator $L := -D_\alpha(A_{\alpha\beta}D_\beta)$, wenn dessen Koeffizienten $A_{\alpha\beta}$, $\alpha,\beta=1,\dots,n$, lediglich meßbar und beschränkt sind und die Elliptizitätsbedingung aus (GV)III erfüllen (vgl.[9], (1.1) Theorem). Ausgangspunkt bilden die gemittelten Green-Funktionen $g^\rho(\cdot,y)$, $y\in\Omega,\rho>0$, die als die eindeutigen $\overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega)$-Lösungen der Gleichung

$$Lu = |B_\rho(y)|^{-1}\,\chi_{B_\rho(y)\cap\Omega}\,, \qquad \chi_{B_\rho(y)\cap\Omega} := \begin{cases} 1 \text{ auf } B_\rho(y)\cap\Omega \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

definiert werden. Für die Funktionen $g^\rho(\cdot,y)$ gilt im Fall $n\geq 3$

$$0 \leq g^\rho(x,y) \leq C(n,\lambda,\Lambda)\,|x-y|^{2-n} \quad \text{für alle Punkte } x\in\Omega\,,$$

und mit dieser Information kann man die Beschränktheit der Schar $\{g^\rho(\cdot,y)\}_{\rho>0}$ in einem Banachraum X beweisen, wo X echt zwischen $\overset{\circ}{H}{}^{1,r}(\Omega)$ und $\overset{\circ}{H}{}^{1,n/(n-1)}(\Omega)$ liegt; insbesondere hat man Schranken $1<r<\frac{n}{n-1}$

auf $\{\|g^\rho(\cdot,y)\|_{\overset{\circ}{H}{}^{1,s}(\Omega)}\}_{\rho>0}$ für jeden Exponent s mit $1<s<\frac{n}{n-1}$. Durch Übergang zu schwach konvergenten Teilfolgen (Reflexivität der Sobolev-Räume $\overset{\circ}{H}{}^{1,s}(\Omega)$ für $s\in\mathbb{R}$, $s>1$) gewinnt man eine Funktion $g(\cdot,y):\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

$g(\cdot,y)\in X$, $0\leq g(x,y)\leq C(n,\lambda,\Lambda)\,|x-y|^{2-n}$ für fast alle $x\in\Omega$,

$Lg(\cdot,y) = \delta_y$ im Distributionssinn auf Ω

Ferner zeigen Grüter, Widman in [9], (1.1) Theorem, daß die Funktion $g(\cdot,y)$ durch die Bedingungen

$g(\cdot,y)\geq 0$, $g(\cdot,y)\in \overset{\circ}{H}{}^{1,1}(\Omega)\cap H^{1,2}(\Omega-\overline{B}_r(y))$ für alle $r>0$ und

$Lg(\cdot,y) = \delta_y$

bereits eindeutig festgelegt wird.

Wir können nun die folgende Aussage machen: Unter den Voraussetzungen

(3.1) mit N=1 ist die auf Seite 63 definierte Green-Funktion G identisch mit der Green-Funktion g von oben. Gemäß Lemma 3.3 bleibt der Nachweis von $G(\cdot,y)\geq o$: Dazu sei $u := G^{\rho}(\cdot,y)$ mit Radius $\rho<\operatorname{dist}(y,\partial$ Setzen wir $B(v,w) := \int_{\Omega} A_{\alpha\beta}\, D_{\alpha}v\, D_{\beta}w\, dx$ für $v,w\in \overset{o}{H}{}^{1,2}(\Omega)$, so folgt mit $u^{+} := \max(o,u)\in \overset{o}{H}{}^{1,2}(\Omega)$ gemäß (GV)III:

$$o\leq B(u-u^{+},u-u^{+}) = B(u,u)-B(u,u^{+})-B(u^{+},u)+B(u^{+},u^{+})$$
$$=B(u,u)-B(u,u^{+}) = \int_{B_{\rho}(y)} (u-u^{+})dx \leq o, \text{ also } B(u-u^{+},u-u^{+}) = o \rightarrow$$

$\nabla u = \nabla u^{+}$ nach (GV)III. Da $u,u^{+}\in \overset{o}{H}{}^{1,2}(\Omega)$ sind, folgt nach Lemma o.2: $u = u^{+}$. Mithin gilt $G^{\rho}(\cdot,y)\geq o$. Ersetzt man nun ρ durch eine positive Nullfolge $\{\rho_{\mu}\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ mit $G^{\rho_{\mu}}(\cdot,y) \longrightarrow G(\cdot,y)$ bei $\mu\to\infty$ fast überall auf Ω, so ergibt sich schließlich $G(\cdot,y)\geq o$, was den Beweis beendet.

|_|

Die bisher bewiesenen Eigenschaften gestatten eine erste einfache Anwendung der Green-Matrix, die wir den weitergehenden Anwendungen in § 5 voranstellen: Es handelt sich hierbei um eine Darstellungsformel für die schwache Lösung mit Nullrandwerten des elliptischen Systems

(3.9) $L_{ij}u^{j} = f^{i}-D_{\alpha}F^{i}_{\alpha}$, $i=1,\ldots,N$ auf Ω.

Satz 6: Die Voraussetzungen (3.1) seien erfüllt, $q\in\mathbb{R}$ sei $>n$, und es gelte $f\in L^{q}(\Omega,\mathbb{R}^{N})$, $F\in L^{q}(\Omega,\mathbb{R}^{nN})$. Ist dann u die eindeutige $\overset{o}{H}{}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^{N})$ Lösung von (3.9), so hat man in jedem Punkt $x\in\Omega$ und für alle $i=1,\ldots,N$ die Formel

(3.1o) $$u^{i}(x) = \int_{\Omega} {}^{t}G^{k}_{i}(z,x)\, f^{k}(z)dz + \int_{\Omega} D_{z_{\alpha}}\, {}^{t}G^{k}_{i}(z,x)\, F^{k}_{\alpha}(z)dz$$
$$= \int_{\Omega} G^{i}_{k}(x,z)\, f^{k}(z)dz + \int_{\Omega} D_{z_{\alpha}} G^{i}_{k}(x,z)\, F^{k}_{\alpha}(z)dz.$$

Bemerkungen: 1) Nach Satz 1 liegt u im Sobolev-Raum $\overset{o}{H}{}^{1,q}(\Omega,\mathbb{R}^{N})$, ist also insbesondere stetig auf $\bar{\Omega}$; mithin sind die auf der rechten Seite

von (3.1o) stehenden Potentiale stetige Funktionen des Arguments x, was a priori nicht klar ist. Satz 6 enthält somit implizit eine Information über die Abbildungseigenschaften der mit dem Kern G gebildeten Potentialoperatoren.

2) Trivialerweise gilt die (3.1o) entsprechende Formel, wenn man im Satz statt (3.9) das transponierte System $L^t_{ij}u^j = f^i - D_\alpha F^i_\alpha$, $i=1,\dots,N$, betrachtet.

Beweis: Sei $x \in \Omega$ fest. Man wähle $\rho > 0$ mit $\rho < \operatorname{dist}(x,\partial\Omega)$ und teste das System (3.9) mit ${}^tG^\rho_i(\cdot,x)$. Nach Definition von ${}^tG^\rho_i(\cdot,x)$ folgt

$$\fint_{B_\rho(x)} u^i dz = \int_\Omega {}^tG^{\rho k}_i(z,x)\, f^k(z)dz + \int_\Omega D_{z_\alpha}\, {}^tG^{\rho k}_i(z,x)\, F^k_\alpha(z)dz \qquad (+)$$

Die Stetigkeit von u ergibt $\fint_{B_\rho(x)} u^i dz \to u^i(x)$ bei $\rho \searrow 0$; auf der rechten Seite von (+) benutzen wir Lemma 3.1 (iv) (für ${}^tG$ statt G) mit $p := \frac{q}{q-1}$, um die Behauptung zu schließen. Die zweite Gleichung aus (3.1o) folgt nach Satz 4.

Q E D

Anmerkung: Zum Beweis des Satzes reicht die Voraussetzung $f \in L^s(\Omega,\mathbb{R}^N)$ für ein $s \in \mathbb{R}$ mit $s > n/2$, denn nach dem Sobolev-Einbettungssatz Lemma o.1 (i) und Lemma 3.1 (iv) gilt ${}^tG^\rho(\cdot,x) \rightharpoonup {}^tG(\cdot,x)$ bei $\rho \searrow 0$ (schwache Konvergenz) in $L^r(\Omega,\mathbb{R}^{N^2})$ für alle reellen Exponenten r mit $1 < r < \frac{n}{n-2}$.

Eine einfache Folgerung aus Satz 6 ist das nachstehende

Maximum-Prinzip: Sei $u \in H^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ die eindeutige schwache Lösung des homogenen Systems (3.9) unter den Voraussetzungen (3.1) mit $u-v \in \overset{o}{H}{}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, wo $v \in H^{1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ vorgegeben ist. Dann gilt mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$ nur abhängig von $n,N,\lambda,\Lambda,\Omega$ und dem Stetigkeitsmodul

der Koeffizienten die Abschätzung

$$\sup_{\Omega}|u-v| \le C\ \mathrm{Lip}(v),$$

wo Lip(v) eine Lipschitz-Konstante für v ist.

Beweis: $w := u-v$ ist aus $\overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ und schwache Lösung des Systems $L_{ij}w^j = -D_\alpha F^i_\alpha, i=1,\dots,N$, auf Ω mit $F^i_\alpha := -A^{ij}_{\alpha\beta} D_\beta v^j$. Aus (3.1o) für w liest man die Behauptung ab. |_|

Wir bemerken, daß ähnliche Maximum-Prinzipien in der Arbeit [5] von Cannarsa diskutiert werden, allerdings bei konstanter Koeffizienten-Matrix, die einer Legendre-Hadamard -Bedingung genügt (vgl. Theorem 1.II, 1.III in [5]).

Zum Abschluß dieses Paragraphen wollen wir Satz 6 verallgemeinern auf den Fall von Systemen mit signierten Maßen als rechter Seite.

Lemma 3.4: Die Voraussetzungen (3.1) seien erfüllt, ν sei ein endliches Radon-Maß aufΩ. Dann gilt:

(i) Die Green-Matrix G ist $\nu\times L^n$-meßbar auf $\Omega\times\Omega$.

(ii) G ist bezüglich des Produktmaßes $\nu\times L^n$ integrierbar, speziell liegt die durch $\Omega \ni y \longmapsto \int_\Omega G(x,y)\,d\nu(x)$ definierte Funktion im Raum $L^1(\Omega,\mathbb{R}^{N^2})$.

Beweis: (i) folgt, wenn wir zeigen können, daß die Diagonale $D := \{(x,x): x\in\Omega\}$ $(\nu\times L^n)$-Maß o hat, denn in diesem Fall unterscheidet sich G nach Satz 5 nur auf einer $(\nu\times L^n)$-Nullmenge von einer stetigen Funktion. Sei $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Borel-Mengen mit $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ und $L^n(A_i) < \varepsilon$, wo $\varepsilon>o$ beliebig vorgegeben ist. Dann gilt:

$$(\nu\times L^n)(D) \le \sum_{i=1}^{\infty} (\nu\times L^n)(A_i\times A_i) \le c\sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i) = \varepsilon\ \nu(\Omega).$$

Gemäß $\nu(\Omega) < \infty$ nach Voraussetzung folgt mit $\varepsilon\downarrow o$: $(\nu\times L^n)(D) = o$.

(ii) Mit G ist auch $|G|$ meßbar bezüglich des Maßes $\nu\times L^n$, der Satz von Fubini für nicht-negative Funktionen ergibt:

$$\int_{\Omega\times\Omega} |G|\, d(\nu\times L^n) = \int_{\Omega} \{ \int_{\Omega} |G(x,y)|\, d\nu(x)\} dL^n(y) =$$

$$\int_{\Omega} \{ \int_{\Omega} |G(x,y)|\, dL^n(y)\} d\nu(x) = \int_{\Omega} \{ \int_{\Omega} |{}^tG(y,x)|\, dL^n(y)\} d\nu(x),$$

wo wir Satz 4 benutzt haben. Nach Lemma 3.1 (iii) für ${}^tG$ statt G ist das innere Integral unabhängig von x durch eine endliche Konstante beschränkt, und da ν ein endliches Maß sein soll, gilt die erste Aussage in (ii). Der allgemeine Satz von Fubini liefert die noch ausstehende zweite Behauptung.

Q E D

Wir kommen jetzt zur angekündigten Verallgemeinerung von Satz 6.

Satz 7: Die Voraussetzungen (3.1) seien erfüllt, $\mu\in M(\Omega)^N$ sei ein vektorwertiges signiertes Radon-Maß auf Ω von endlicher totaler Variation. $u \in \bigcap_{1\le r<\frac{n}{n-1}} \overset{\circ}{H}{}^{1,r}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ sei die schwache Lösung des Systems $L_{ij} u^j = \mu^i$, $i=1,\dots,N$, auf Ω. Dann gilt für L^n-fast alle $y\in\Omega$ die Darstellungsformel

(3.11) $$u^k(y) = \int_{\Omega} {}^tG^i_k(x,y)\, d\mu^i(x), \quad k=1,\dots,N .$$

Anmerkung: Die Gültigkeit einer zu (3.11) analogen Formel für die schwache Lösung des Systems $L^t_{ij}u^j = \mu^i$ auf Ω, $i=1,\dots,N$, ist klar.

Beweis: Zur Vereinfachung nehmen wir an, daß die μ^i selbst schon endliche Radon-Maße auf Ω sind, andernfalls zerlege man $\mu^i = \mu^i_+ - \mu^i_-$ mit endlichen Radon-Maßen μ^i_+, μ^i_-. Seien $k\in\{1,\dots,N\}$ und $y\in\Omega$ sowie $\rho < \operatorname{dist}(y,\partial\Omega)$ fixiert. Gemäß ${}^tG^\rho_k(\cdot,y)\in \overset{\circ}{H}{}^{1,r}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ für alle reellen $r \ge 1$ ist ${}^tG^\rho_k(\cdot,y)$ als Testvektor in der schwachen Form von $L_{ij}u^j=\mu^i$, $i=1,..,N$

zugelassen, und umgekehrt darf man das System für ${}^tG_k^\rho(\ ,y)$ mit u testen, Vergleich ergibt:

$$\fint_{B_\rho(y)} u^k dx = \int_\Omega {}^tG^{\rho i}_k(x,y)d\mu^i(x) = \int_\Omega \{ \fint_{B_\rho(y)} {}^tG^i_k(x,z)dz\}d\mu^i(x) =$$

$$\fint_{B_\rho(y)} \{ \int_\Omega {}^tG^i_k(x,z)d\mu^i(x)\}dz,$$

wobei wir Korollar 2 zu Satz 4 und das vorstehende Lemma benutzt haben, und zwar jeweils für ${}^tG$ statt G. Da die Funktion $f^k:\Omega\ni z \to \int_\Omega {}^tG^i_k(x,z)d\mu^i(x)$ Lebesgue-integrierbar ist nach Lemma 3.4 (in der Version für ${}^tG$), sind L^n-fast alle Punkte $z\in\Omega$ Lebesgue-Punkte von f^k. Sei Ω_o die Menge der gemeinsamen Lebesgue-Punkte von u^k und f^k für k=1,...,N. Offenbar ist $L^n(\Omega-\Omega_o)=o$. Wählt man $y\in\Omega_o$, so kann man in der obigen Gleichungskette zum Limes $\rho\downarrow o$ übergehen und erhält (3.11).

Q E D

Im folgenden Paragraphen untersuchen wir das Wachstum der Green-Matrix bei Annäherung an die Diagonale in Ω. Mit den dort gewonnenen Informationen werden wir dann in § 5 die Darstellungsformel (3.11) aus Satz 7 genauer analysieren und daraus unter bestimmten Bedingungen an die Maße μ^i Rückschlüsse auf das Verhalten der Lösung ziehen.

§ 4 Abschätzung der Singularität

Wie in den Anwendungsbeispielen der Einleitung deutlich wurde, ist es wichtig, das Wachstum der Green-Matrix $G(x,y)$ bei Annäherung $x \to y$ an die Diagonale genau zu kennen. Im skalaren Fall $N = 1$ hat man eine vollständige Beschreibung durch Teil (iv) aus Satz B. Auch im vektorwertigen Fall (mit $n \geq 3$) erwartet man, daß sich zumindest die Abschätzung von $|G(x,y)|$ nach oben durch die "richtige Potenz" $|x-y|^{2-n}$ ergibt; dies wird durch das Verhalten der in Lemma 1.2 b) definierten Fundamentallösung zu konstanten Koeffizienten nahegelegt. Wir werden die Gültigkeit dieser Vermutung in Satz 8 bestätigen.

Bisher haben wir die Green-Matrix bei stetigen Leitkoeffizienten untersucht; aus technischen Gründen (vgl. Lemma 4.2) benötigen wir zur Abschätzung der Größenordnung der Singularität wenigstens eine Hölder-Bedingung, d.h. wir setzen ab jetzt voraus

(4.1) (GV) von Seite 28 mit $n \geq 3$; es gibt Konstanten α, L, $0<\alpha<1$, $L>0$, so daß $\sup\left\{ \frac{|A^{ij}_{\gamma\beta}(x)-A^{ij}_{\gamma\beta}(y)|}{|x-y|^{\alpha}} : x \neq y \in \bar{\Omega},\ i,j=1,\dots,N,\ \gamma,\beta=1,\dots,n \right\} \leq L$ gilt.

Nachdem wir in Satz 8 das Wachstum von $|G(x,y)|$ betrachtet haben, diskutieren wir in Satz 9 die Größenordnung von $|\nabla_x G(x,y)|$ mit dem Ergebnis: $|\nabla_x G(x,y)| \leq \text{const}\ |x-y|^{1-n}$ für Punkte x genügend nahe bei y. Schließlich befassen wir uns mit dem Stetigkeitsverhalten von $\nabla_x G(\cdot,y)$ auf Ringgebieten $B_{2R}(y) - \bar{B}_R(y)$ um die Singularität y. Auf jedem Ring erfüllt $\nabla_x G(\cdot,y)$ eine α-Hölder-Bedingung, wobei die Hölder-Konstante bei $R \downarrow 0$ wie eine Potenz von $\frac{1}{R}$

wächst. Den größten Raum beansprucht der Beweis von Satz 8, die daran anschließenden Sätze werden aus Satz 8 mit der Campanato-Methode abgeleitet. Für den Beweis von Satz 8 fixiert man $x_o \in \Omega$, und vergleicht $G(\cdot,x_o)$ lokal bei $x_o \in \Omega$ mit der in Lemma 1.2 b) eingeführten Fundamentallösung zu konstanten Koeffizienten $A^{ij}_{\gamma\beta}(x_o)$, deren Wachstum explizit bekannt ist.

Satz 8: Die Voraussetzungen (4.1) seien erfüllt, $\beta \in]0,1[$ sei beliebig vorgegeben. Dann findet man Konstanten C_1 abhängig von $n,N,\lambda,\Lambda,\alpha,L$, R_o zusätzlich abhängig von β und C_2 zusätzlich abhängig von Ω und β mit

(4.2) $|G(x,y)| \le C_1 \cdot |x-y|^{2-n} + C_2 \, R^{1+\beta-n}$

für alle $x \in B_{2R}(y)-\{y\}$, $y \in \Omega$ und $0<R\le\min(R_o,\frac{1}{4}\operatorname{dist}(y,\partial\Omega))$.

□

Anmerkung: Im Unterschied zu Satz B (iv) beweisen wir die kanonische Abschätzung für $|G(\cdot,y)|$ nur lokal in einer genügend kleinen Umgebung des Punktes $y \in \Omega$. Um Abschätzungen bis zum Rand zu erhalten, müßte man die lokale Theorie aus § 1 (Satz 2 und seine Folgerungen) entsprechend verallgemeinern.

Vor dem Beweis von Satz 8 erinnern wir nochmals an die Konstantenkonvention am Ende von § 0. Wir bezeichnen deshalb nachfolgend alle Konstanten, die von denselben Parametern wie C_1 und C_2 aus (4.2) abhängen, auch mit diesen Symbolen.

Beweis von Satz 8: Ohne Einschränkung gelte $0 \in \Omega$ und $y = 0$. Mit α aus (4.1) und β wie im Satz seien

$p := \frac{n}{n-\beta}$, $p_o := \frac{n}{n-\alpha} \in]1,\frac{n}{n-1}[$, $q := \frac{n}{1-\beta}$, $q_o := \frac{n}{1-\alpha} > n$.

Offenbar ist q bzw. q_o der (n-1)-fach iterierte Sobolev-Exponent zu p bzw. p_o. Auf den Sobolev-Räumen $H^{1,s}(B_R(0),\mathbb{R}^N)$, $R>0$, $1<s<\infty$, betrachten wir die Norm

$$*\|u\|_{s,R} := \frac{1}{R}\|u\|_{L^s(B_R(0),\mathbb{R}^N)} + \|\nabla u\|_{L^s(B_R(0),\mathbb{R}^{nN})}$$

und führen wie auf Seite 41 die Operatoren

$T_R^s : H^{1,s}(B_R(0),\mathbb{R}^N) \longrightarrow H^{1,s}(B_R(0),\mathbb{R}^N)$ ein. Wir schreiben $*\|T_R^s\|$ für die Norm von T_R^s bzgl. $*\|\cdot\|_{s,R}$. Folgende Eigenschaften der Operatoren sind wichtig (vgl. (1.8), (1.9)):

(4.3)

(i) $*\|T_R^s\| \le C(n,N,\lambda,\Lambda,s)\cdot \mathrm{osc}(R)$; $\mathrm{osc}(R) := \sup\{\|A^{ij}_{\gamma\delta}-A^{ij}_{\gamma\delta}(0)\|_{L^\infty(B_R(0))} : i,j=1,\dots,N,\ \gamma,\delta=1,\dots,n\}$

(ii) $L_{oij}(T_R^s u)^j = D_\gamma(\{A^{ij}_{\gamma\delta}-A^{ij}_{\gamma\delta}(0)\}D_\delta u^j)$ schwach auf $B_R(0)$ für $u\in H^{1,s}(B_R(0),\mathbb{R}^N)$.

Wir wählen R_o nun so, daß für alle $R>0$ mit $R\le \min(R_o,\frac{1}{4}\,\mathrm{dist}(0,\partial\Omega))$

(4.4) $$*\|T_{4R}^s\| \le \frac{1}{2}$$

gilt, wenn s die Werte $\frac{n\cdot p}{n-k\cdot p}$, $\frac{n\cdot p_o}{n-k\cdot p_o}$, $k=0,\dots,n-1$, durchläuft. Gemäß (4.3)(i) ist dies mit einem von den im Satz genannten Daten abhängigen positiven R_o möglich. Wir fixieren $R>0$ mit $R\le\min(R_o,\frac{1}{4}\,\mathrm{dist}(0,\partial\Omega))$. $(E_k^j)_{1\le j,k\le N}$ sei die in Lemma 1.2 b) definierte Fundamentallösung zum Operator $(L_{oij})_{1\le i,j\le N}$. Bei festem $k\in\{1,\dots,N\}$ seien $G := G_k(\cdot,0)$, $E := E_k$ und

(4.5) $$w := G - T_{2R}^p G - E\ .$$

Offenbar gehört w zum Sobolev-Raum $H^{1,p}(B_{2R}(0),\mathbb{R}^N)$, und aus (4.3)(ii) folgt mit den Eigenschaften von G und E sofort

(4.6) $L_{oij}\, w^j \equiv 0$ schwach auf $B_{2R}(0)$.

Wir benötigen folgende Information über die Regularität von w .

Lemma 4.1: Es gilt $w \in H^{1,q}(B_{2R}(0), \mathbb{R}^N)$ mit $^*\|w\|_{q,2R} \le C_2 \cdot R^{1-n}$.

Beweis des Lemmas: Nach Korollar 2 zu Satz 2 ist zunächst mit (4.6)

(4.7) $^*\|w\|_{q,R} \le C_2\, R^{1-n}\, {}^*\|w\|_{p,2R}$,

denn das hier definierte R_o ist offenbar nicht größer als die entsprechende im Beweis des Korollars definierte Schranke. Die Norm auf der rechten Seite von (4.7) wird gemäß (4.5) folgendermaßen abgeschätzt:

$$^*\|E\|_{p,2R} \le C_2\, R^{1-\beta} \quad \text{nach (1.7) aus Lemma 1.2 b)}$$

$$^*\|G\|_{p,2R} \le \frac{1}{R}\{|B_{2R}(0)|^{\frac{1}{p}-\frac{n-p}{n\cdot p}} \|G\|_{L^{\frac{n\cdot p}{n-p}}(B_{2R}(0),\mathbb{R}^N)} + \|\nabla G\|_{L^p(B_{2R}(0),\mathbb{R}^{nN})}$$

$$\le C_2 \|G\|_{L^{\frac{n\cdot p}{n-p}}(\Omega,\mathbb{R}^N)} + \|\nabla G\|_{L^{\frac{n\cdot p}{n-p}}(\Omega,\mathbb{R}^{nN})}$$

$$\le C_2 \|\nabla G\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^{nN})} \le C_2 ,$$

wobei wir die Hölder-Ungleichung, Lemma 0.1 (i) und Lemma 3.1 (iii) benutzt haben. Schließlich ist

$$^*\|T_{2R}^p\, G\|_{p,2R} \underset{(4.4)}{\le} \frac{1}{2}\, {}^*\|G\|_{p,2R} \le C_2 .$$

Somit ergibt (4.7)

(4.8) $^*\|w\|_{p,R} \le C_2\, R^{1-n}$.

Um die volle Behauptung von Lemma 4.1 zu erhalten, müssen wir analog zu (4.8) die Ungleichung

$$\underline{(4.9)} \quad \frac{1}{R}\,\|u\|_{L^q(T_{2R},\mathbb{R}^N)} + \|\nabla u\|_{L^q(T_{2R},\mathbb{R}^{nN})} \le C_2\, R^{1-n}$$

auf dem Ring $T_{2R} := B_{2R}(0)-B_R(0)$ für die drei Funktionen $U := E, G$ bzw. $T^p_{2R}G$ beweisen.

Für $u = G$ folgt (4.9) unmittelbar aus Lemma 1.5 im Anhang zu § 1, da das hier betrachtete R_o die Bedingungen aus Lemma 1.5 erfüllt, wenn man $^*\|G\|_{p,4R}$ wie vorhin $^*\|G\|_{p,2R}$ abschätzt. Um (4.9) für $u = E$ zu gewinnen, bedient man sich erneut (1.7) aus Lemma 1.2 b). Weiterhin gilt in abgekürzter Schreibweise ohne Indices nach Definition von T^p_{2R} auf Seite 41 mit der Setzung $\omega(\zeta) := A(\zeta)-A(0)$:

$$T^p_{2R}G(x) = \int_{B_{2R}(0)} \nabla^{2N-1}K(x-\zeta)\,\omega(\zeta)\,\nabla G(\zeta)\,d\zeta = \int_{B_{\frac{R}{2}}(0)} \ldots d\zeta + \int_{B_{2R}(0)-B_{\frac{R}{2}}(0)} \ldots d\zeta =: \varphi_1(x)+\varphi_2(x)$$

für Punkte $x \in B_{2R}(0)$. Sei $F(\zeta) := \begin{cases} \omega(\zeta)\,\nabla G(\zeta) & \text{auf } B_{2R}(0)-B_{\frac{R}{2}}(0) \\ 0 & \text{auf } B_{\frac{R}{2}}(0) \end{cases}$

Dann ist $\varphi_2 = \tilde{P}_{2R}(F)$ (Definition vor Lemma 1.3), Lemma 1.3 ergibt:

$$^*\|\varphi_2\|_{q,2R} \le C_2\,\|F\|_{L^q(B_{2R}(0)-B_{\frac{R}{2}}(0),\mathbb{R}^{nN})} \le C_2\,\|\nabla G\|_{L^q(B_{2R}(0)-B_{\frac{R}{2}}(0),\mathbb{R}^{nN})}.$$

Die Norm rechts wird mit Lemma 1.5 abgeschätzt, wobei man $^*\|G\|_{p,4R}$ wie oben verarbeitet. Mithin gilt (4.9) für $u := \varphi_2$.

Für $x \in T_{2R}$ ist $\zeta \longmapsto \nabla^{2N-1}K(x-\zeta)$ glatt auf der Kugel $B_{\frac{R}{2}}(0)$, deshalb gilt für $x \in T_{2R}$

$$\nabla\varphi_1(x) = \int_{B_{\frac{R}{2}}(0)} \nabla^{2N}K(x-\zeta)\,\omega(\zeta)\,\nabla G(\zeta)\,d\zeta \Rightarrow |\nabla\varphi_1(x)| \le C_2\,R^{-n}\,|\nabla G|_{L^1(B_{\frac{R}{2}}(0),\mathbb{R}^{nN})},$$

also $\|\nabla\varphi_1\|_{L^q(T_{2R}(0))} \le C_2 \cdot R^{\frac{n}{q}-n} \cdot R^{n(1-\frac{1}{p})} \cdot \|\nabla G\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^{nN})} \le C_2 \cdot R^{1-n}$

nach der Hölder-Ungleichung und Lemma 3.1 (iii). Ganz analog folgt

$$\frac{1}{R}\|\varphi_1\|_{L^q(T_{2R}(0))} \le C_2 \cdot R^{1-n} .$$

Damit ist (4.9) auch für $u = T^p_{2R} G$ bewiesen. Mit (4.7) folgt nun die Behauptung von Lemma 4.1.

□

Als unmittelbare Folge von Lemma 4.1 erhalten wir nach Lemma 0.1 (v)

(4.10) $$\sup_{B_{2R}(0)} |w| \le C_2 \cdot R^{1+\beta-n} .$$

Wir schreiben (4.5) in der Form

$$G - T^{p_o}_{2R} G = w + E ,$$

wobei wir $G \in \bigcap_{1\le r<\frac{n}{n-1}} \overset{\circ}{H}{}^{1,r}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ benutzen, was die Gleichheit der Funktionen $T^p_{2R} G$ und $T^{p_o}_{2R} G$ liefert. Nach (4.4) ist

$\mathrm{Id} - T^{p_o}_{2R} : H^{1,p_o}(B_{2R}(0),\mathbb{R}^N) \longrightarrow H^{1,p_o}(B_{2R}(0),\mathbb{R}^N)$ bijektiv, und

für den inversen Operator gilt

$$(\mathrm{Id} - T^{p_o}_{2R})^{-1} = \sum_{\ell=o}^{\infty} (T^{p_o}_{2R})^{\ell} ,$$

so daß aus obiger Gleichung wird

(4.11) $$G = E + \sum_{\ell=1}^{\infty} (T^{p_o}_{2R})^{\ell} E + \sum_{\ell=o}^{\infty} (T^{q}_{2R})^{\ell} w \quad \text{auf} \quad B_{2R}(0) .$$

Dabei wurde $T_{2R}^{p_o} w$ durch $T_{2R}^{q} w$ ersetzt, was nach Lemma 4.1 möglich ist. Es gilt

$$*\| \sum_{\ell=0}^{\infty} (T_{2R}^{q})^{\ell} w\|_{q,2R} \overset{(4.4)}{\leq} \sum_{\ell=0}^{\infty} (\tfrac{1}{2})^{\ell} *\|w\|_{q,2R} \leq 2 \cdot *\|w\|_{q,2R} ,$$

was analog zu (4.10) die Abschätzung

$$\text{(4.12)} \quad \sup_{B_{2R}} | \sum_{\ell=0}^{\infty} (T_{2R}^{q})^{\ell} w | \leq C_2 \, R^{1+\beta-n}$$

impliziert. Gemäß (1.7) gilt $|E(x)| \leq C_1 \cdot |x|^{2-n}$; wir müssen also nur noch zeigen, daß $\sum_{\ell=1}^{\infty} (T_{2R}^{p_o})^{\ell} E$ auch in dieser Form abgeschätzt werden kann. Das geschieht in

Lemma 4.2: Sei $\psi_\ell := (T_{2R}^{p_o})^{\ell} E$ für $\ell \in \mathbb{N}_o$. Dann gibt es eine Konstante $C = C(n,N,\lambda,\Lambda,\alpha,L)$ unabhängig von ℓ, so daß für $0 < R < 1$ mit $B_{4R}(0) \subset \Omega$ gilt

$$\text{(4.13)} \quad \begin{aligned} &\text{(i)} \quad |\nabla\psi_\ell(x)| \leq C^{\ell+1} \, R^{\ell\cdot\alpha} \, |x|^{1-n} \\ &\text{(ii)} \quad |\nabla\psi_\ell(x_1) - \nabla\psi_\ell(x_2)| \leq C^{\ell+1} \, R^{\ell\cdot\alpha} \cdot |x_1 - x_2|^{\alpha} \cdot \\ &\qquad\qquad \max(|x_1|^{1-n-\alpha}, |x_2|^{1-n-\alpha}) \end{aligned}$$

für $x, x_1, x_2 \in B_{2R}(0) - \{0\}$.

□

Da der Beweis von Lemma 4.2 aufwendig ist, wollen wir zunächst den Beweis von Satz 8 beenden. Dazu sei $R > 0$ wieder wie bisher, also $R \leq \min(R_o, \frac{1}{4}\operatorname{dist}(0,\partial\Omega))$.

Für $\ell \in \mathbb{N}$ und $x \in B_{2R}(0)$ ist

$$|(T_{2R}^{P_o})^{\ell} E(x)| = \left| \int_{B_{2R}(0)} \nabla^{2N-1} K(x-\zeta)\, \omega(\zeta)\, \nabla\psi_{\ell-1}(\zeta)\, d\zeta \right|$$

$$\underset{(4.13)}{\leq} C \cdot R^{\alpha} \int_{B_{2R}(0)} |x-\zeta|^{1-n} \cdot C^{\ell} \cdot R^{(\ell-1)\alpha} |\zeta|^{1-n}\, d\zeta$$

$$\underset{\text{Lemma 0.9}}{\leq} C^{\ell+1} \cdot R^{\ell\cdot\alpha} |x|^{2-n} \quad \Longrightarrow$$

$$\underline{(4.14)} \quad \left| \sum_{\ell=1}^{\infty} (T_{2R}^{P_o}) E(x) \right| \leq C \cdot \sum_{\ell=1}^{\infty} (C R^{\alpha})^{\ell} \cdot |x|^{2-n} \quad \text{für } x \in B_{2R}(0)$$

mit C wie im Lemma. Wir wählen nun das bisher betrachtete R_o so, daß zusätzlich

$$\underline{(4.15)} \quad C \cdot R_o^{\alpha} \leq \frac{1}{2}$$

gilt. Offenbar ergibt dann (4.14) die Ungleichung $\left| \sum_{\ell=1}^{\infty} (T_{2R}^{P_o})^{\ell} E(x) \right| \leq C_1 |x|^{2-n}$ mit einer Konstanten C_1 wie im Satz. Dies liefert mit (4.12) und (4.11) die Behauptung des Satzes. Überdies erkennt man an (4.4), (4.15) und den vorgenommenen Abschätzungen, daß die im Satz auftretenden Konstanten von den aufgelisteten Parametern abhängen.

QED

Der nun folgende Beweis von Lemma 4.2 benutzt wesentlich Kapitel 2.6 aus [18]. Im Unterschied zu den Hölder-stetigen Integranden dort betrachten wir singuläre Integranden, die auf der Kugel $B_{2R}(0) - \{0\}$ lokal Hölder-stetig sind und deren Hölder-Konstante bei Annäherung an den Ursprung mit einer gewissen Potenz des Abstandes anwächst.

Beweis von Lemma 4.2: Wir schließen durch Induktion nach ℓ. Dabei benutzen wir für $T_{2R}^{p_o} u$, $u \in H^{1,p_o}(B_{2R}(O), \mathbb{R}^N)$, die abkürzende Schreibweise (Unterdrückung der Indices).

$$T_{2R}^{p_o} u(x) = \int_{B_{2R}(O)} \nabla^{2N-1} K(x-\zeta)\, \omega(\zeta)\, \nabla u(\zeta)\, d\zeta, \quad x \in B_{2R}(O) .$$

$\ell = 0$: Nach Lemma 1.2 b) ist jedenfalls (4.13)(i) erfüllt. Ebenfalls nach diesem Lemma gilt

(4.16) $\quad |\nabla^2 E(x)| \le C \cdot |x|^{-n}$ für alle $x \in B_{2R}(O)$.

Seien $x_1, x_2 \in B_{2R}(O)$ mit $0 < |x_1| < |x_2|$

Fall 1: $x_2 \in B_{\frac{|x_1|}{2}}(x_1)$

Integration von (4.16) über die Strecke von x_1 nach x_2 ergibt

$$|\nabla E(x_1) - \nabla E(x_2)| \le C \cdot |x_1|^{-n} |x_1 - x_2| \le C \cdot |x_1|^{-n} \cdot \{|x_1|^{1-\alpha} + |x_2|^{1-\alpha}\} \cdot |x_1 - x_2|^{\alpha}$$

Gemäß $|x_2| \le \frac{3}{2} |x_1|$ folgt daraus (4.13)(ii).

Fall 2: $x_2 \notin B_{\frac{|x_1|}{2}}(x_1)$. Dann ist $|x_1 - x_2| \ge \frac{|x_1|}{2}$ und somit

$$|\nabla E(x_1) - \nabla E(x_2)| \le C \cdot |x_1|^{1-n} \le C \cdot |x_1|^{1-n-\alpha} |x_1 - x_2|^{\alpha}$$

Induktionsschluß: Es sei $\ell \in \mathbb{N}$. Für Punkte $x, x_1, x_2 \in B_{2R}(O) - \{O\}$ gelte mit einer Konstanten $D_{\ell-1}$

(4.17)
$$|\nabla \psi_{\ell-1}(x)| \le D_{\ell-1} |x|^{1-n}$$
$$|\nabla \psi_{\ell-1}(x_1) - \nabla \psi_{\ell-1}(x_2)| \le D_{\ell-1} |x_1 - x_2|^{\alpha} \max(|x_1|^{1-n-\alpha}, |x_2|^{1-n-\alpha})$$

Wir setzen (wieder ohne Indices) $\Gamma(y) := \nabla^{2N-1} K(y)$, $\Delta(y) := \nabla^{2N} K(y)$, also

$$\psi_\ell(x) = \int_{B_{2R}(0)} \Gamma(x-\zeta)\ \omega(\zeta)\ \nabla\psi_{\ell-1}(\zeta)\, d\zeta\,, \quad x \in B_{2R}(0) - \{0\}$$

Lemma 0.7 ergibt die Ableitungsformel

$$\underline{(4.18)} \quad \nabla\psi_\ell(x) = C\cdot\omega(x)\nabla\psi_{\ell-1}(x) + \lim_{\rho\downarrow 0} \int_{B_{2R}(0)-B_\rho(x)} \Delta(x-\zeta)\omega(\zeta)\nabla\psi_{\ell-1}(\zeta)\,d\zeta$$

$$=: f(x) + \lim_{\rho\downarrow 0} W_\rho(x)$$

Wir zeigen zunächst, daß der Grenzwert $W(x) := \lim_{\rho\downarrow 0} W_\rho(x)$ existiert. Dazu sei $x \in B_{2R}(0) - \{0\}$ fest. Man wähle $0 < \sigma < \rho < \frac{|x|}{2}$. Mit Lemma 0.8 (für Δ statt K) gilt (beachte: a)(iii) und b) dieses Lemmas folgen aus [18], Thm. 2.6.3, und Lemma 1.1; nach letztgenanntem Lemma ist K eine gerade Funktion, also auch $\Delta = \nabla^{2N} K$.) :

$$W_\rho(x) - W_\sigma(x) = \int_{B_\rho(x)-B_\sigma(x)} \Delta(x-\zeta)\ [\varphi(\zeta)-\varphi(x)]\, d\zeta\,, \quad \varphi := \omega\cdot\nabla\psi_{\ell-1}$$

Für [ ] haben wir gemäß (4.17) und $|\omega(x)| \le L|x|^\alpha, |\omega(x)-\omega(\zeta)| \le L|x-\zeta|^\alpha$ die folgende Abschätzung (mit einer Konstanten C wie in Lemma 4.2):

$$\underline{(4.19)} \quad |\varphi(\zeta)-\varphi(x)| \le C\, D_{\ell-1}\{|x|^\alpha\cdot|x-\zeta|^\alpha \max(|x|^{1-n-\alpha}, |\zeta|^{1-n-\alpha}) + |\zeta|^{1-n}|x-\zeta|^\alpha\}$$

Es folgt:

$$|W_\rho(x)-W_\sigma(x)| \le C\, D_{\ell-1}\{\int_{B_\rho(x)-B_\sigma(x)} |x-\zeta|^{\alpha-n} \max(|x|^{1-n-\alpha}, |\zeta|^{1-n-\alpha})\,d\zeta\cdot|x|^\alpha$$

$$+ \int_{B_\rho(x)-B_\sigma(x)} |x-\zeta|^{\alpha-n}\ |\zeta|^{1-n}\, d\zeta\}$$

($|\zeta| \ge \frac{|x|}{2}$ auf $B_\rho(x)$)

$$\le C\, D_{\ell-1}\{|x|^\alpha|x|^{1-n-\alpha} + |x|^{1-n}\} \int_{B_\rho(x)} |x-\zeta|^{\alpha-n}\, d\zeta$$

$$\le C\, D_{\ell-1}\ |x|^{1-n}\ \rho^\alpha$$

Mithin ist $(W_\tau(x))_{\tau>0}$ Cauchy-Folge, der Grenzwert W(x) existiert und erfüllt

(4.20) $|W_\rho(x)-W(x)| \le C\, D_{\ell-1}\cdot \rho^\alpha \cdot |x|^{1-n}$ für $x\in B_{2R}(0)-\{0\}$ und $0<\rho<\frac{1}{2}|x|$.

Analog ist für x und ρ wie in (4.20)

$$|W_\rho(x)| = \Big|\int_{B_{2R}(0)-B_\rho(x)} \Delta(x-\zeta)\,[\varphi(\zeta)-\varphi(x)]\,d\zeta\Big|$$

$$\le C\cdot D_{\ell-1}\{|x|^\alpha \int_{B_{2R}(0)-B_\rho(x)} |x-\zeta|^{\alpha-n}\max(|\zeta|^{1-n-\alpha},|x|^{1-n-\alpha})\,d\zeta +$$

$$+ \int_{B_{2R}(0)-B_\rho(x)} |x-\zeta|^{\alpha-n}\cdot|\zeta|^{1-n}\,d\zeta\} \le \quad \text{(Lemma 0.9)}$$

$$C\, D_{\ell-1}\{|x|^\alpha|x|^{1-n} + |x|^{1-n}\int_{B_{2R}(0)-B_\rho(x)} |x-\zeta|^{\alpha-n}d\zeta + |x|^{\alpha+1-n}\} \le$$

$C\, D_{\ell-1}\, R^\alpha\, |x|^{1-n}$, was mit (4.20) ergibt

(4.21) $|W(x)| \le C\, D_{\ell-1}\, R^\alpha\cdot|x|^{1-n}$

Da $|f|$ nach Induktionsannahme (4.17) ebenfalls durch die rechte Seite von (4.21) nach oben abgeschätzt wird, folgt gemäß (4.18)

(4.22) $|\nabla\psi_\ell(x)| \le C\, D_{\ell-1}\, R^\alpha\cdot|x|^{1-n}$ für alle $x\in B_{2R}(0)-\{0\}$.

Wir beweisen jetzt die Hölder-Bedingung für $\nabla\psi_\ell$. Mit $0<\rho<2R$ sei für $x\in B_{2R}(0)-B_{2\rho}(0)$

$W_\rho(x) := \int_{B_{2R}(0)-B_\rho(x)} \Delta(x-\zeta)\,\varphi(\zeta)\,d\zeta$. Es gilt die Ableitungsformel

$$\nabla W_\rho(x) = -\int_{\partial B_\rho(x)} \Delta(x-\zeta)\,[\varphi(\zeta)-\varphi(x)]\,\frac{\zeta-x}{\rho}\,dH^{n-1}\,\zeta$$

$$+ \int_{B_{2R}(0)-B_\rho(x)} \nabla\Delta(x-\zeta)\,[\varphi(\zeta)-\varphi(x)]\,d\zeta\,, \quad x\in B_{2R}(0)-B_{2\rho}(0)$$

mit $a := |\int_{\partial B_\rho(x)} \dots dH^{n-1}\zeta| \underset{(4.19)}{\leq} C D_{\ell-1}\{|x|^\alpha \int_{\partial B_\rho(x)} |x-\zeta|^{\alpha-n} \max(|x|^{1-n-\alpha}, |\zeta|^{1-n-\alpha}) dH^{n-1}\zeta$

$$+ \int_{\partial B_\rho(x)} |\zeta|^{1-n} |x-\zeta|^{\alpha-n} \, d H^{n-1}\zeta\}$$

Gemäß $|x| \geq 2\rho$ ist $|\zeta| \geq \frac{1}{2}|x|$ auf $\partial B_\rho(x)$, was offenbar

$a \leq C\, D_{\ell-1}\, R^\alpha\, |x|^{1-n-\alpha}\, \rho^{\alpha-1}$

ergibt. Diese Abschätzung soll auch für das Integral

$\int_{B_{2R}(0)-B_\rho(x)} \nabla\Delta(x-\zeta)\,[\varphi(\zeta)-\varphi(x)]\,d\zeta$ bewiesen werden. Dazu schreibt man

$$B_{2R}(0)-B_\rho(x) = \{(B_{2R}(0)-B_{\frac{|x|}{2}}(0)) - B_\rho(x)\} \cup (B_{\frac{|x|}{2}}(0)-B_\rho(x)) =: \Omega_1 \cup \Omega_2 \,.$$

Es gilt $\Omega_2 = B_{\frac{|x|}{2}}(0)$, denn für $y \in B_{\frac{|x|}{2}}(0)$ ist $|x-y| \geq |x|-|y| > \frac{|x|}{2} > \rho$.

Beachtet man $|\zeta| \geq \frac{|x|}{2}$ auf Ω_1, so folgt

$$|\int_{\Omega_1} \nabla\Delta(x-\zeta)[\varphi(\zeta)-\varphi(x)]d\zeta| \leq C\, D_{\ell-1} \int_{\Omega_1} \{|x|^\alpha |x-\zeta|^{-1-n+\alpha} \max(|x|^{1-n-\alpha}, |\zeta|^{1-n-\alpha})$$

$$+ |x-\zeta|^{-1-n+\alpha}|\zeta|^{1-n}\}\, d\zeta$$

$$\leq C\, D_{\ell-1}\{|x|^\alpha\, |x|^{1-n-\alpha} + |x|^{1-n}\} \int_{\mathbb{R}^n - B_\rho(x)} |x-\zeta|^{-1-n+\alpha}\, d\zeta$$

$$\leq C\, D_{\ell-1}\; R^\alpha\; \rho^{\alpha-1}\; |x|^{1-n-\alpha}\,.$$

Auf Ω_2 gilt $|x-\zeta| \geq \frac{|x|}{2}$, also

$$|\int_{\Omega_2} \nabla\Delta(x-\zeta)[\varphi(\zeta)-\varphi(x)]d\zeta| \leq C\, D_{\ell-1}\{|x|^\alpha |x|^{-1-n+\alpha} \int_{B_{\frac{|x|}{2}}(0)} |\zeta|^{1-n-\alpha}\, d\zeta$$

$$+ |x|^{-1-n+\alpha} \int_{B_{\frac{|x|}{2}}(0)} |\zeta|^{1-n}\, d\zeta\} \leq$$

$\leq C\, D_{\ell-1}\, R^\alpha\, |x|^{-n} \leq C\, D_{\ell-1}\, R^\alpha \cdot \rho^{\alpha-1}\, |x|^{1-n-\alpha}$. Zusammen folgt:

(4.23) $|\nabla W_\rho(x)| \le C D_{\ell-1} R^\alpha \rho^{\alpha-1} |x|^{1-n-\alpha}$, $x \in B_{2R}(0)-B_{2\rho}(0)$, $0<\rho<2R$

Seien $x_1, x_2 \in B_{2R}(0)-\{0\}$ mit $0 < |x_1-x_2| \le \frac{1}{4} \min(|x_1|,|x_2|)$. Mit $\rho := |x_1-x_2|$ liegt die Strecke von x_1 nach x_2 ganz in $B_{2R}(0)-B_{2\rho}(0)$, so daß (4.23) für jeden Punkt x auf der Strecke erfüllt ist. Integration von (4.23) über die Strecke ergibt

(4.24) $|W_\rho(x_1)-W_\rho(x_2)| \le C D_{\ell-1} R^\alpha \cdot |x_1-x_2|^\alpha \max(|x_1|^{1-n-\alpha}, |x_2|^{1-n-\alpha})$.

Nach (4.20) gilt (4.24) für W statt W_ρ, und die Abschätzung (4.19) ergibt (4.24) für die in (4.18) definierte Funktion f. Folglich gilt (4.24) für $\nabla\psi_\ell$.

Seien schließlich $x_1, x_2 \in B_{2R}(0)-\{0\}$ mit $\frac{1}{4}\min(|x_1|,|x_2|) \le |x_1-x_2|$. Nimmmt man o.E. $|x_1| \le |x_2|$ an, so ergibt (4.22):

$$|\nabla\psi_\ell(x_1)-\nabla\psi_\ell(x_2)| \le C D_{\ell-1} R^\alpha |x_1|^{1-n} \le C D_{\ell-1} R^\alpha |x_1-x_2|^\alpha \max(|x_1|^{1-n-\alpha}, |x_2|^{1-n-\alpha}).$$

Somit sind die Ungleichungen (4.17) für ψ_ℓ statt $\psi_{\ell-1}$ bewiesen, und zwar mit der Konstanten $D_\ell := R^\alpha C \cdot D_{\ell-1}$. Die Behauptung von Lemma 4.2 ist nun klar.

QED

Anmerkung: Es wäre wünschenswert, auch eine Abschätzung von $|G(x,y)|$ nach unten ähnlich wie in Satz B (iv) zu haben. Mit einfachen Argumenten können wir immerhin noch folgendes beweisen:

Unter den Voraussetzungen von Satz 8 gilt für jeden Punkt $y \in \Omega$ und alle $k \in \{1,\dots,N\}$ $\limsup_{x \to y} |G_k(x,y)| \cdot |x-y|^{n-2} > 0$.

Beweis: Wir benutzen die Notation aus dem Beweis von Satz 8. Zunächst gibt es eine Folge $\{x_\nu\}$ in Ω mit $x_\nu \to 0$ und eine Konstante $C > 0$ mit $(*)\ |E(x_\nu)| \cdot |x_\nu|^{n-2} \geq C$. Andernfalls hätte man $\lim_{x\to 0} |E(x)| \cdot |x|^{n-2} = 0$. Aus Homogenitätsgründen (Lemma 1.1, 1.2 b)) folgt $\lim_{x\to 0} E(\frac{x}{|x|}) = 0$. Da $E(\frac{x}{|x|})$ auf jedem vom Nullpunkt ausgehenden Strahl konstant ist, gilt $E \equiv 0$, Widerspruch! Also kann man $(*)$ auf einer geeigneten Folge erfüllen. Nach (4.11) ist $|G| \geq |E| - |\sum_{\ell=1}^{\infty} (T_{2R}^{p_0})^\ell E| - |\sum_{\ell=0}^{\infty} (T_{2R}^{q})^\ell w| \geq \frac{1}{2}|E| - C_2 R^{1+\beta-n}$ auf $B_{2R}(0)$, wenn man die Abschätzungen (4.12), (4.14) beachtet und R genügend klein wählt. Nimmt man $x_\nu \in B_{2R}(0)$ an, so folgt $|x_\nu|^{n-2}|G(x_\nu)| \geq \frac{1}{2}|x_\nu|^{n-2}|E(x_\nu)| - C_2 R^{1+\beta-n}|x_\nu|^{n-2}$, also $\limsup_{\nu\to\infty} |x_\nu|^{n-2}|G(x_\nu)| \geq \frac{1}{2} C$, was die Behauptung beweist. $\square$

Nachdem wir in Satz 8 das Wachstum der Green-Matrix untersucht haben, befassen wir uns jetzt mit der Ableitung $\frac{\partial}{\partial x} G(\cdot,y)$, $y \in \Omega$, und zeigen

Satz 9: Die Voraussetzungen (4.1) seien erfüllt, $\beta \in]0,1[$ sei beliebig vorgegeben. Dann findet man Konstanten C_1 abhängig von $n,N,\lambda,\Lambda,\alpha,L$, R_0 zusätzlich abhängig von β und C_2 zusätzlich abhängig von Ω und β mit

(4.25) $|\frac{\partial}{\partial x} G(x,y)| \leq C_1|x-y|^{1-n} + C_2|x-y|^{-1} R^{1+\beta-n}$

für alle $x \in B_R(y)-\{y\}$, $y \in \Omega$, $0 < R \leq \min(R_0, \frac{1}{4}\operatorname{dist}(y,\partial\Omega))$.

Der Beweis des Satzes benutzt die sogenannte Campanato-Methode (vgl. z.B. [4], [7]), die es gestattet, den Gradienten einer schwachen Lösung eines elliptischen Systems mit Hölder-stetigen

Koeffizienten lokal nach oben abzuschätzen durch Schranken auf die Lösung.

Beweis: Ohne Einschränkung wird $y = 0$ angenommen. R_o und R seien zunächst wie in Satz 8. Also gilt für $u := G_k(\cdot,0)$, $k \in \{1,\dots,N\}$ fest, die Abschätzung (4.2) auf $B_{2R}(0)$. Wir fixieren $z \in B_R(0)-\{0\}$ und setzen $D := B_{\frac{|z|}{8}}(z)$. Seien $x_o \in D$, $0 \le \rho \le r \le \operatorname{diam}(D) = \frac{|z|}{4}$, und $v \in H^{1,2}(B_r(x_o), \mathbb{R}^N)$ sei die schwache Lösung von $L_{x_o ij}\, v^j := -D_\gamma(A^{ij}_{\gamma\delta}(x_o) D_\delta v^j) \equiv 0$ auf $B_r(x_o)$, $v-u \in \overset{o}{H}{}^{1,2}(B_r(x_o),\mathbb{R}^N)$. v erfüllt bekanntlich ([7], p. 80, Thm. 2.1) die Campanato-Ungleichung.

$$\int_{B_\rho(x_o)} |\nabla v|^2\,dx \le C_1 \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \int_{B_r(x_o)} |\nabla v|^2\,dx \tag{4.26}$$

(Die Konstante C_1 in (4.26) wird alleine von den Parametern λ,Λ,n,N bestimmt, hängt also weder von u,ρ,r oder x_o ab.)
Für $w := u-v \in \overset{o}{H}{}^{1,2}(B_r(x_o),\mathbb{R}^N)$ gilt gemäß $L_{ij}\, u^j = 0$ auf $\Omega-\{0\}$

$$\int_{B_r(x_o)} A^{ij}_{\gamma\delta}(x_o) D_\gamma \phi^i D_\delta w^j\,dx = -\int_{B_r(x_o)} (A^{ij}_{\gamma\delta}-A^{ij}_{\gamma\delta}(x_o))\, D_\gamma \phi^i D_\delta u^j\,dx$$

für alle $\phi \in \overset{o}{H}{}^{1,2}(B_r(x_o),\mathbb{R}^N)$. Mit $\phi := w$ folgt durch Standard-abschätzungen

$$\int_{B_r(x_o)} |\nabla w|^2\,dx \le C_1\, r^{2\alpha} \int_{B_r(x_o)} |\nabla u|^2\,dx, \tag{4.27}$$

mit der Setzung $\varphi(\rho) := \int_{B_\rho(x_o)} |\nabla u|^2\,dx$ ergeben (4.26)/(4.27)

$$\varphi(\rho) \le C_1 \left\{\left(\frac{\rho}{r}\right)^n + r^{2\alpha}\right\}\varphi(r) \text{ für alle } 0<\rho\le r \le \operatorname{diam}(D) =: d\,. \tag{4.28}$$

Nach Lemma 0.10 liefert (4.28) die Wachstumsbedingung

$$\varphi(\rho) \le C_1 \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-\alpha} \varphi(r) \quad \forall\, 0<\rho\le r\le d\,, \text{ vorausgesetzt} \tag{4.29}$$

$\varepsilon := d^{2\alpha} < \varepsilon_o$, ε_o wie in Lemma 0.10. Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß $(\frac{1}{4} R_o)^{2\alpha} < \varepsilon_o$ gilt und haben dann $d^{2\alpha} = (\frac{|z|}{4})^{2\alpha} \le (\frac{R_o}{4})^{2\alpha} < \varepsilon_o$. Nun betrachten wir die Größe $\psi(\rho) := \int_{B_\rho(x_o)} |\nabla u - (\nabla u)_{x_o,\rho}|^2 dx$ mit $(\nabla u)_{x_o,\rho} := \fint_{B_\rho(x_o)} \nabla u \, dx$. Mit v wie vorhin gilt die Campanato-Ungleichung ([7], p.80, Thm. 2.1).

(4.30) $$\int_{B_\rho(x_o)} |\nabla v - (\nabla v)_{x_o,\rho}|^2 dx \le C_1 (\frac{\rho}{r})^{n+2} \int_{B_r(x_o)} |\nabla v - (\nabla v)_{x_o,r}|^2 dx$$

(C_1 hier wie in (4.26).)

Vergleich von v mit u führt mit (4.29)/(4.30) auf

(4.31) $$\psi(\rho) \le C_1 \{(\frac{\rho}{r})^{n+2} \psi(r) + r^{2\alpha} \varphi(r)\}, \quad 0 < \rho \le r \le d.$$

In (4.31) benutzt man (4.29) in der Form $\varphi(r) \le C_1 (\frac{r}{d})^{n-\alpha} \varphi(d)$, also

$$\psi(\rho) \le C_1 \{(\frac{\rho}{r})^{n+2} \psi(r) + r^{n+\alpha} \frac{\varphi(d)}{d^{n-\alpha}}\},$$

was nach Lemma 0.10

$$\psi(\rho) \le C_1 \, \rho^{n+\alpha} \{\frac{\psi(r)}{r^{n+\alpha}} + \frac{\varphi(d)}{d^{n-\alpha}}\}$$

impliziert. Wählt man noch $r = d$, so folgt (wenn wir o.E. $R_o \le 1$ und damit $d \le \frac{1}{4}$ annehmen):

(4.32) $\psi(\rho) \le C_1 \, \rho^{n+\alpha} \, d^{-n-\alpha} \{\psi(d) + \varphi(d)\}$ für alle $0 < \rho \le d$

mit $\varphi(d) + \psi(d) \le C_1 \int_{B_{\frac{|z|}{2}}(z)} |\nabla u|^2 dx$. Setzt man diese vom Punkt x_o unabhängige Abschätzung in (4.32) ein, so ist letztendlich gezeigt:

$$\forall\, x_o \in D \;\forall\, 0<\rho\le d: \; \rho^{-n-\alpha} \int_{B_\rho(x_o)} |\nabla u - (\nabla u)_{x_o,\rho}|^2 dx \le C_1 |z|^{-n-\alpha} \int_{B_{\frac{|z|}{2}}(z)} |\nabla u|^2 dx$$

Folglich gehört ∇u zum Campanato-Raum $L^{2,n+\alpha}(D,\mathbb{R}^{nN})$. Lemma 0.3 (mit $\lambda := n+\alpha$, $p := 2$) ergibt:

$$\sup_D |\nabla u| \le C_1 \, |z|^{-\frac{n}{2}} \, \|\nabla u\|_{L^2(B_{\frac{|z|}{2}}(z),\mathbb{R}^{nN})} .$$

Um die Norm rechts zu verarbeiten, testen wir das System $L_{ij} u^j \equiv 0$ (auf $\Omega-\{0\}$) mit $\eta^2 u$, wo $\eta \in C^\infty_{kpt}(B_{\frac{3}{4}|z|}(z),[0,1])$ ist mit $\eta \equiv 1$ auf $B_{\frac{|z|}{2}}(z)$, $|\nabla\eta| \le C_1/|z|$. Es folgt

$$\|\nabla u\|_{L^2(B_{\frac{|z|}{2}}(z),\mathbb{R}^{nN})} \le \frac{C}{|z|} \, \|u\|_{L^2(B_{\frac{3}{4}|z|}(z),\mathbb{R}^{N})}$$

Nach (4.2) ist schließlich $\sup_{B_{\frac{3}{4}|z|}(z)} |u| \le C_1 |z|^{2-n} + C_2 \, R^{1+\beta-n}$.

Die drei letzten Ungleichungen ergeben

$$|\nabla u(z)| \le C_1 \, |z|^{1-n} + C_2 \, |z|^{-1} \cdot R^{1+\beta-n} ,$$

das ist die behauptete Beziehung (4.25).

QED

Die gerade durchgeführte Rechnung lieferte $\nabla u \in L^{2,n+\alpha}(D,\mathbb{R}^{nN})$ für $u = G_k(\cdot,0)$, also nach Lemma 0.3: $\nabla u \in C^{0,\frac{\alpha}{2}}(\overline{D},\mathbb{R}^{nN})$. Dies haben wir nur in der Form benutzt, daß man eine Schranke für $|\nabla u|$ angeben kann. Abschließend zeigen wir mit den Notationen aus dem Beweis von Satz 9, daß ∇u auf $B_R(0)-\{0\}$ α-Hölder-stetig ist. Dazu seien $z,\overline{z} \in B_R(0)-\{0\}$ mit $|z| \le |\overline{z}| \le \frac{R}{2}$. Es sei $D := B_{\frac{|z|}{8}}(z)$, $d := \operatorname{diam}(D) \le 1$. Wir gehen zurück zur Abschätzung

(4.31) $\psi(\rho) \le C_1 \cdot \{(\frac{\rho}{r})^{n+2} \, \psi(r) + r^{2\alpha} \, \varphi(r)\}$, $0 < \rho \le r \le d$,

aus der mit $M := \sup_{B_{\frac{|z|}{2}}(z)} |\nabla u|$ folgt

(4.33) $\psi(\rho) \le C_1 \{(\frac{\rho}{r})^{n+2} \psi(r) + r^{2\alpha+n} M^2\}$

(4.33) ergibt nach Lemma 0.10 für alle $\rho \le d$ und $x_o \in D$

$$\psi(\rho) \le C_1 \rho^{n+2\alpha}\{\frac{\psi(d)}{d^{n+2\alpha}} + M^2\} \le C_1 \rho^{n+2\alpha}\{d^{-n-2\alpha} d^n M^2 + M^2\}$$

$$\le C_1 \rho^{n+2\alpha} d^{-2\alpha} M^2 , \quad \text{also nach Lemma 0.3:}$$

(4.34) $\nabla u \in C^{0,\alpha}(\overline{D}, \mathbb{R}^{nN})$, $\sup_{a \ne b \in \overline{D}} \frac{|\nabla u(a) - \nabla u(b)|}{|a-b|^\alpha} \le C_1 \cdot d^{-\alpha} M$

Fall 1: $\overline{z} \in D$. Dann gilt nach (4.34) und (4.25)

$$|\nabla u(z) - \nabla u(\overline{z})| \le C_1 \cdot |z|^{-\alpha} M \cdot |z-\overline{z}|^\alpha \le \{C_1 |z|^{1-n-\alpha} + C_2 |z|^{-1-\alpha} R^{1+\beta-n}\} |z-\overline{z}|^\alpha$$

Fall 2: $\overline{z} \notin D$, also $|z-\overline{z}| \ge \frac{|z|}{8}$. Dann schätzt man ab

$|\nabla u(z) - \nabla u(\overline{z})| \le |\nabla u(z)| + |\nabla u(\overline{z})|$, und benutzt für jeden Summanden rechts die Gradientenabschätzung (4.25). Es folgt dasselbe Resultat wie in Fall 1. Insgesamt ist somit bewiesen:

Satz 10: Die Voraussetzungen (4.1) seien erfüllt, $\beta \in]0,1[$ sei beliebig vorgegeben. Dann gibt es Konstanten C_1 abhängig von $n,N,\lambda,\Lambda,\alpha,L$, R_o zusätzlich abhängig von β und C_2 zusätzlich abhängig von β und Ω mit

$$|\frac{\partial}{\partial x} G(x,y) - \frac{\partial}{\partial x} G(\overline{x},y)| \le \{C_1 \cdot \max(|x-y|^{1-n-\alpha}, |\overline{x}-y|^{1-n-\alpha})$$

(4.35) $$+ C_2 \cdot \max(|x-y|^{-1-\alpha}, |\overline{x}-y|^{-1-\alpha}) R^{1+\beta-n}\} |x-\overline{x}|^\alpha$$

für alle $x,\overline{x} \in B_{\frac{R}{2}}(y) - \{y\}$, $y \in \Omega$, $0 < R \le \min(R_o, \frac{1}{4}\operatorname{dist}(y,\partial\Omega))$.

$|\overline{}|$

Die Abschätzung (4.35) besagt im wesentlichen, daß sich für Ringgebiete $T_{2r}(y) = B_{2r}(y) - B_r(y)$ (mit genügend kleinem Radius) die α-Hölder-Konstante für $\frac{\partial}{\partial x} G(\cdot, y)$ wie $r^{1-n-\alpha}$ verhält, ein Resultat, daß für die Fundamentallösung elliptischer Systeme mit konstanten Koeffizienten wohlbekannt ist (vgl. Lemma 4.1, (4.13)(ii) mit $\ell = 0$) und nicht verbessert werden kann. Mit diesem Ergebnis beschließen wir die Untersuchung des Wachstumsverhaltens der Green-Matrix, um uns nachfolgend den Anwendungen zu widmen.

□

§ 5 Anwendungen der Green-Matrix

Wie wir in Satz A der Einleitung gesehen haben, läßt sich mit der Greenschen Funktion g_Δ zum Laplace-Operator das Verhalten harmonischer Funktionen an isolierten Singularitäten genau beschreiben, vorausgesetzt die betrachtete harmonische Funktion wächst bei Annäherung an die Singularität nicht zu stark. Beim Beweis "vergleicht"man die harmonische Funktion mit g_Δ und benutzt dann die genauen Abschätzungen des Wachstums der Green-Funktion. Unser Ziel ist es, Satz A auf schwache Lösungen des homogenen Systems $L_{ij}u^j \equiv o$ zu übertragen.

Wie im vorigen Paragraphen vereinbaren wir auch hier die Voraussetzungen

(5.1) (GV) von Seite 28 mit $n \geq 3$; es gibt Konstanten $o < \alpha \leq 1$

und $o < L < \infty$ mit $\sup \left\{ \frac{|A^{ij}_{\gamma\beta}(x) - A^{ij}_{\gamma\beta}(y)|}{|x-y|^\alpha} : x \neq y \in \overline{\Omega}, \right.$

$\left. i,j = 1,..,N,\ \gamma,\beta = 1,..,n \right\} \leq L$

Satz 11: Es gelte (5.1) mit $\alpha = 1$, die Koeffizientenmatrix erfüllt also eine Lipschitz-Bedingung. Überdies nehmen wir an, daß der Rand des Gebietes Ω von der Klasse C^2 ist. y sei ein Punkt aus Ω. $u \in H^{1,1}_{loc}(\Omega - \{y\}, \mathbb{R}^N)$ sei schwache Lösung des homogenen Systems $L_{ij}u^j = O$, $i = 1,..,N$, auf $\Omega - \{y\}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Es gibt Konstanten $C, \varepsilon > o$ mit $|u(x)| \leq C \cdot |x-y|^{1+\varepsilon-n}$

(5.2) lokal bei y

(ii) Für ein $\delta > 0$ ist $u \in H^{1,1+\delta}(\Omega - \overline{B_\rho}(y), \mathbb{R}^N)$ für alle genügend kleinen Radien $\rho > 0$. Überdies sei $u = 0$ im $H^{1,1+\delta}$-Sinn auf $\partial\Omega$.

Dann gibt es Konstanten $C_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,..,N$, mit $u = C_i\, G_i(\cdot, y)$ auf Ω. Insbesondere kann u auf einer Folge $x_k \to y$ nicht schneller wachsen als $|x_k - y|^{2-n}$.

Anmerkung: "$u = 0$ auf $\partial\Omega$ im $H^{1,1+\delta}$-Sinn" heißt hier, daß es zu $\rho > 0$ genügend klein eine Folge (η_k) in $C^\infty_{kpt}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ (abhängig von ρ) gibt mit $\eta_k \xrightarrow{k\to\infty} u$ in $H^{1,1+\delta}(\Omega - \overline{B_\rho}(y), \mathbb{R}^N)$.

Beweis: Ohne Einschränkung sei $y = 0$. Korollar 1 zu Satz 2 ergibt $u \in \bigcap_{1\le r<\infty} H^{1,r}_{loc}(\Omega - \{0\}, \mathbb{R}^N)$. Mit demselben Argument wie im Beweis von Lemma 3.3 (unter Beachtung von $u|_{\partial\Omega} = 0$) läßt sich dies verschärfen zu $u \in \bigcap_{1\le r<\infty} H^{1,r}(\Omega - \overline{B_\rho}(0), \mathbb{R}^N)$ für genügend kleine $\rho > 0$. Das Differenzenquotientenverfahren liefert $u \in H^{2,2}_{loc}(\Omega - \{0\}, \mathbb{R}^N)$, denn wir haben Lipschitz-Koeffizienten. Daß $\nabla^2 u$ bis zum Rand $\partial\Omega$ quadratisch integrierbar ist, zeigt der Beweis von Theorem 8.12 in [8], der sich auf elliptische Systeme übertragen läßt. An dieser Stelle benötigt man entscheidend die Information $u|_{\partial\Omega} = 0$ (auch im $H^{1,2}$-Sinn, wie man sich leicht überlegt). Somit ist gezeigt: (*) $u \in H^{2,2}(\Omega - \overline{B_\rho}(0), \mathbb{R}^N)$ für kleine $\rho > 0$.

Ferner können wir mit der Campanato-Methode die Voraussetzung (5.2)(i) in eine Wachstumsbedingung für ∇u umwandeln: Dem Beweis von Satz 9 entnimmt man die Abschätzung

$$|\nabla u(x)| \le c \cdot |x|^{-\frac{n}{2}-1} \|u\|_{L^2(B_{\frac{3}{4}}(x),\mathbb{R}^N)}$$

für Punkte x genügend nahe bei o mit einer Konstanten c unabhängig von x und u, also nach (5.2)

(5.3) $|\nabla u(x)| \le C\ |x|^{\varepsilon-n}$ lokal bei o

Seien $o < R_o < \text{dist}(o,\partial\Omega)$ und $o < \rho < R < R_o$, wo ρ so klein sein soll, daß (*) gilt. Sei $z \in B_{R_o}(o) - B_R(o)$, und bei festem $k \in \{1,..,N\}$ setzen wir $w := {}^tG_k(\cdot,z)$. Ist $B_r(o) \subset \Omega$, so setzen wir für Funktionen $f,g : \partial B_r \to \mathbb{R}^N$ (für die dies Sinn macht)

$$M(f,g) := A^{ij}_{\alpha\beta}(g^i D_\beta f^j \cdot \nu_\alpha - D_\alpha g^i\ f^j\ \nu_\beta),$$

wo ν den äußeren Normalenvektor an ∂B_r bezeichnet.

Per Definition gilt $\int_\Omega A^{ij}_{\alpha\beta}\ D_\alpha w^i\ D_\beta \phi^j dx = \phi^k(z)$ für alle $\phi \in C^\infty_{kpt}(\Omega,\mathbb{R}^N)$

Sei $\eta \in C^\infty_{kpt}(\Omega)$ mit $\eta \equiv 1$ auf $T := B_{R_o}(o) - B_R(o)$, $\eta \equiv o$ auf $B_{\frac{R}{2}}(o)$.

Da $\phi := \eta u$ in der obigen Integralrelation zugelassen ist (Approximationsschluß), folgt:

$$u^k(z) = \int_T A^{ij}_{\alpha\beta}\ D_\alpha w^i\ D_\beta u^j dx + \int_{\Omega-T} A^{ij}_{\alpha\beta}\ D_\alpha w^i\ D_\beta (\eta u)^j dx =: (1) + (2)$$

In (1) kann man partiell nach α integrieren (auf T ist u von der Klasse $H^{2,2}$) und

$L_{ij} u^j \equiv O$ punktweise f.ü. auf Ω ausnutzen, es folgt

$$(1) = \int_{\partial T} A^{ij}_{\alpha\beta}\ D_\beta\ u^j\ w^i\ \nu_\alpha\ d\,H^{n-1}(x) \quad (\nu = \text{äußere Normale an T})$$

Auf $\Omega - T$ ist w eine $H^{2,2}$-Funktion (das sieht man mit denselben Argumenten wie zu Beginn des Beweises), löst also dort $L^t_{ij} w^j = O$ punktweise fast überall. Man erhält

$(2) = -\int_{\partial T} A^{ij}_{\alpha\beta} D_\alpha w^i \, u^j \nu_\beta \, d H^{n-1}(x)$, zusammen

$$u^k(z) = \int_{\partial B_{R_o}(o)} M(u,w) dH^{n-1}(x) - \int_{\partial B_R(o)} M(u,w) d H^{n-1}(x)$$

Es ist $\int_{\partial B_{R_o}(o)} M(u,w) dH^{n-1}(x) = -\int_{\Omega - B_{R_o}(o)} D_\alpha (A^{ij}_{\alpha\beta} D_\beta u^j w^i) dx$

$$+ \int_{\Omega - B_{R_o}(o)} D_\beta (A^{ij}_{\alpha\beta} D_\alpha w^i u^j) dx = 0$$

nach partieller Integration gemäß $u|_{\partial\Omega} = 0, w|_{\partial\Omega} = 0$ und $-D_\alpha(A^{ij}_{\alpha\beta} D_\beta u^j) = 0$, $-D_\beta(A^{ij}_{\alpha\beta} D_\alpha w^i) = 0$ auf $\Omega - B_{B_{R_o}}(o)$. Folglich gilt die Darstellung

$$\underline{(5.4)} \quad u^k(z) = -\int_{\partial B_R(o)} M(u,w) d H^{n-1}(x).$$

Nachfolgend untersuchen wir das in (5.4) auftretende Randintegral. Gemäß $z \notin B_R(o) - B_\rho(o)$ ist

$$0 = -\int_{B_R(o)-B_\rho(o)} u^j D_\beta (A^{ij}_{\alpha\beta} D_\alpha w^i) dx = -\int_{B_R(o)-B_\rho(o)} D_\beta (u^j A^{ij}_{\alpha\beta} D_\alpha w^i) dx$$

$$+ \int_{B_R(o)-B_\rho(o)} D_\beta u^j A^{ij}_{\alpha\beta} D_\alpha w^i \, dx$$

$$= -\int_{\partial(B_R(o)-B_\rho(o))} u^j A^{ij}_{\alpha\beta} D_\alpha w^i \, \nu_\beta \, dH^{n-1}(x) + \int_{B_R(o)-B_\rho(o)} D_\alpha (w^i D_\beta u^j A^{ij}_{\alpha\beta}) dx$$

$$= \int_{\partial B_R(o)} M(u,w) dH^{n-1}(x) - \int_{\partial B_\rho(o)} M(u,w) d H^{n-1}(x)$$

Daher geht (5.4) über in

$$\underline{(5.5)} \quad u^k(z) = -\int_{\partial B_\rho(o)} M(u,w) d H^{n-1}(x).$$

Per Definition ist

$$\int_{\partial B_\rho(o)} M(u,w)\,dH^{n-1}(x) = w^i(o) \int_{\partial B_\rho(o)} A^{ij}_{\alpha\beta} D_\beta u^j \nu_\alpha \, d H^{n-1}(x)$$

$$+ \int_{\partial B_\rho(o)} A^{ij}_{\alpha\beta}(w^i - w^i(o)) D_\beta u^j \cdot \nu_\alpha \, d H^{n-1}(x)$$

$$- \int_{\partial B_\rho(o)} A^{ij}_{\alpha\beta} D_\alpha w^i u^j \nu_\beta \, d H^{n-1}(x)$$

$=: w^i(o)\cdot a_i + b - c$, und für die einzelnen Integrale a_i, b, c gilt, wenn wir o.E. annehmen, daß auf $\partial B_\rho(o)$ die Abschätzungen (5.2) (i)/(5.3) erfüllt sind:

$$a_i = - \int_{\partial (B_{R_o}(o) - B_\rho(o))} A^{ij}_{\alpha\beta} D_\beta u^j \nu_\alpha dH^{n-1}(x) + \int_{\partial B_{R_o}(o)} A^{ij}_{\alpha\beta} D_\beta u^j \nu_\alpha dH^{n-1}(x)$$

$$= \int_{\partial B_{R_o}(o)} A^{ij}_{\alpha\beta} D_\beta u^j \nu_\alpha \, dH^{n-1}(x) =: -C_i$$

Auf $B_R(o)$ löst w das homogene System $L^t_{ij} w^j = o$. Mit der Campanato-Technik schließt man $m := \sup_{B_{\frac{R}{2}}(o)} |\nabla w| < \infty$, also ist w Lipschitz-stetig auf $B_{\frac{R}{2}}(o)$ mit Lipschitz-Konstante m, so daß wir unter der Annahme $\rho < \frac{R}{2}$ mit (5.3) erhalten:

$$|b| \le C \Lambda m \, \rho \, \rho^{n-1} \, \rho^{\varepsilon - n} = c \, \rho^\varepsilon,$$

wo die Konstante c nicht von ρ abhängt.

Entsprechend ist nach (5.2)(i)

$$|c| \le C m \Lambda \, \rho^{\varepsilon+1-n} \, \rho^{n-1} = c \, \rho^\varepsilon$$

Geht man also in (5.5) zur Grenze $\rho \to o$ über, so folgt

$$u^k(z) = C_i \, w^i(o) = C_i \, {}^tG^i_k(o,z) = C_i \, G^k_i(z,o),$$

und zwar für alle $z \in B_{R_o}(o) - B_R(o)$. Da aber R beliebig zwischen o und R_o gewählt werden kann (R_o sei fixiert), haben wir $u = C_i\, G_i(\cdot,o)$ auf $B_{R_o}(o) - \{o\}$. Beide Funktionen u und $C_i G_i(\cdot,o)$ liegen im Sobolev-Raum $\bigcap_{1\le r<s} H^{1,r}(\Omega - B_{R_o}(o), \mathbb{R}^N)$ für $s := \min(\frac{n}{n-1}, 1+\delta)$ mit $u - C_i G_i(\cdot,o) \in \overset{o}{H}{}^{1,r}(\Omega - B_{R_o}(o), \mathbb{R}^N)$ für $1 \le r < s$ und lösen auf $\Omega - B_{R_o}(o)$ das homogene System $L_{ij} v^j \equiv o$. Korollar 2 zu Satz 1 ergibt sodann die Gleichheit auf ganz Ω. Die letzte Aussage des Satzes folgt sofort aus Satz 8.

QED

Anmerkungen und Ergänzungen zu Satz 11: 1) Man kann Satz 11 so interpretieren, daß die Spaltenvektoren der Green-Matrix $G(\cdot,y)$ eine Basis des Raumes X der nicht-trivialen Lösungen des homogenen Systems auf $\Omega - \{y\}$ mit den Eigenschaften (5.2), die zu starkes Wachstum bei $x \to y$ verbieten, bilden. Nach der Anmerkung zu Satz 8 wissen wir, daß die Basisvektoren $G_k(\cdot,y)$, $k = 1,..,N$, mindestens von der Potenzordnung $|x-y|^{2-n}$ wachsen bei $x \to y$ in dem Sinne, daß $\limsup_{x\to y} |x-y|^{n-2} |G_k(x,y)| > o$ gilt, und gleichzeitig (nach Satz 8) lokal bei y eine Abschätzung der Form $|G(x,y)| \le C \cdot |x-y|^{2-n}$ erfüllen. Für $u \in X$, $u \not\equiv o$, ist andererseits eine Ungleichung vom Typ $|u(x)| \le C|x-y|^{2+\varepsilon-n}$ lokal bei y mit einem $\varepsilon > o$ ausgeschlossen. (Diese würde $\nabla u \in L^{\frac{n}{n-1}}$ lokal bei y liefern und somit $u \equiv o$, vgl. die folgende Bemerkung 2). Daher können wir folgende Aussage machen:

Ist u eine nicht-triviale schwache Lösung des homogenen Systems auf $\Omega-\{y\}$ mit $u|_{\partial\Omega} = o$, die bei Annäherung $x \to y$ an die Singularität y von schwächerer Potenzordnung als $|x-y|^{1-n}$ wächst, so verhält sich u bei $x \to y$ genau wie die Potenzordnung $|x-y|^{2-n}$.

2) Angenommen, wir haben anstelle von (5.2) die Information

(5.2)* $u \in \overset{o}{H}{}^{1,1+\delta}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ für ein $\delta > o$.

Für $\delta \geq \frac{1}{n-1}$ folgt $u \in \overset{o}{H}{}^{\frac{n}{n-1}}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ und ein triviales Integrationsargument zeigt, daß u auf ganz Ω schwache Lösung ist, also identisch verschwindet nach Korollar 2 zu Satz 1. (Man benötigt hier nur die Information $\nabla u \in L^{\frac{n}{n-1}}$ lokal bei y, um mit (5.2)(ii) ebenfalls $u \equiv o$ zu schließen.) Sei also $o < \delta < \frac{1}{n-1}$. O.E. wird $y = o$ angenommen. Dem Beweis von Satz 9 entnehmen wir die Abschätzung

$$|\nabla u(x)| \leq C|x|^{-\frac{n}{2}} \|\nabla u\|_{L^2(B_{\frac{|x|}{2}}(x),\mathbb{R}^{nN})}$$

für Punkte x nahe genug bei o. C hängt weder von x noch von u ab. Mit $p := 1+\delta$ und $R := \frac{|x|}{2}$ (für kleine $|x|$) ergibt (1.12) aus Korollar 2 | Satz 2

$$|\nabla u(x)| \leq C\cdot|x|^{-\frac{n}{p}} * \|u\|_{H^{1,p}(B_{|x|}(x),\mathbb{R}^N)}$$

$$\leq C\ |x|^{-\frac{n}{p}} \left\{\frac{1}{|x|}\ \|u\|_{L^s(B_{|x|}(x),\mathbb{R}^N)} \cdot |x| + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^{nN})}\right\}$$

$$\leq C\cdot|x|^{-\frac{n}{p}}\ \|u\|_{H^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)} \quad \text{(nach Lemma 0.1 (i))},$$

wo $s := \frac{np}{n-p}$ gesetzt wurde. Somit ist gezeigt:

(5.6) es gibt $\varepsilon > 0$ und $c > 0$ mit $|\nabla u(x)| \le c \cdot |x|^{\varepsilon - n}$ lokal bei o. Durch Integration liefert (5.6) die Voraussetzung (5.2)(i), also gilt das folgende

Korollar (zu Satz 11):

Unter der Voraussetzung (5.1) mit $\alpha = 1$ seien $u \in \overset{o}{H}{}^{1,1+\delta}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ für ein $\delta > 0$ und $y \in \Omega$. Löst dann u das homogene System $L_{ij}u^j = 0$, $i = 1,..,N$, auf $\Omega - \{y\}$, so findet man $C_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,..,N$, mit $u = C_i G_i(\cdot, y)$ auf Ω.

|¯|

Als zweites Beispiel für die Anwendungsmöglichkeiten der Green-Matrix betrachten wir wie in Satz 7 aus § 3 Systeme $L_{ij}u^j = \mu^i$, $i = 1,..,N$, mit signierten Maßen μ^i als rechter Seite mit dem Ziel, Regularitätseigenschaften der schwachen Lösung $u \in \bigcap_{1 \le r < \frac{n}{n-1}} \overset{o}{H}{}^{1,r}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ zu beweisen, wenn wir Informationen über das Verhalten der mit dem Kern $|x-y|^{2-n}$, $x,y \in \Omega$, und den signierten Maßen μ^i gebildeten Potentiale haben.

Satz 12: Unter den Voraussetzungen (5.1) sei $u \in \bigcap_{1 \le r < \frac{n}{n-1}} \overset{o}{H}{}^{1,r}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ die schwache Lösung des Systems $L_{ij}u^j = \mu^i$, $i = 1,..,N$, auf Ω, wo $\mu \in M(\Omega)^N$ vorgegeben ist mit der Eigenschaft

(5.7) $\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |x-y|^{2-n} d(\mu_+^i + \mu_-^i)(x) < \infty$ für alle Punkte $y \in \Omega$

bei einer Zerlegung $\mu^i = \mu_+^i - \mu_-^i$ mit endlichen Radon-Maßen μ_+^i, μ_-^i auf Ω. Dann gilt:

(i) Jeder Punkt $y \in \Omega$ ist ein Lebesgue-Punkt von u, d.h. $\overline{u}(y) := \lim_{\rho \downarrow o} \fint_{B_\rho(y)} u \cdot dx$ existiert für jeden Punkt $y \in \Omega$.

Identifiziert man u mit dem Vertreter $\bar{u}$, so gilt überall die Darstellungsformel

$$u^k(y) = \int_\Omega {}^t G_k^i(x,y)\, d\mu^i(x) = \int_\Omega G_i^k(y,x)\, d\mu^i(x) \quad \forall y \in \Omega,\ k = 1,..,N.$$

(ii) Die Funktion u hat folgende Stetigkeitseigenschaft:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ und jeder Kugel $B_R(y_o) \subset \Omega$ findet man eine Kugel $B_r(y) \subset B_R(y_o)$ mit $\operatorname{osc}_{B_r(y)} u := \sup_{z,\tilde{z} \in B_r(y)} |u(z) - u(\tilde{z})| < \varepsilon$.

Verlangt man statt (5.7) stärker

$$\text{(5.8)}\quad M := \sup_{y\in\Omega} \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |x-y|^{2-n}\, d(\mu_+^i + \mu_-^i)(x) < \infty\ ,$$

so ist u lokal beschränkt auf Ω.

Anmerkungen: 1) Von Interesse ist natürlich die Frage, welche vektorwertigen Maße $\mu \in M^N(\Omega)$ die Bedingung (5.8) erfüllen. Man kann beispielsweise für μ das Lebesgue-Maß auf Ω multipliziert mit einer Dichtefunktion $f \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ wählen. In diesem Fall liefern jedoch die Regularitätssätze aus § 1 viel stärkere Ergebnisse als lokale Beschränktheit und generische Stetigkeit der Lösung: Satz 1 ergibt $u \in \bigcap_{1\le p<\infty} \overset{o}{H}{}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ und somit Stetigkeit überall und globale Beschränktheit von u. Wir sehen, daß Maße μ mit beschränkten (oder genügend gut Lebesgue-integrierbaren) Dichten bzgl. des Lebesgue-Maßes uninteressant sind für die Anwendungen des vorstehenden Satzes. Man kann jedoch leicht Maße μ finden, die singulär bzgl. des Lebesgue-Maßes sind, aber immer noch (5.8) erfüllen: Sei Σ eine Hyperebene in $\mathbb{R}^n$ mit $\Sigma \cap \Omega \neq \phi$. Man setzt $\mu^i(A) := H^{n-1}(A \cap \Sigma)$, $A \subset \Omega$, $i = 1,..,N$. Offenbar ist μ^i ein endliches Radon-Maß auf Ω; die Gültigkeit

von (5.8) folgt, weil das (n-1)-dimensionale Hausdorff-Maß auf der Hyperebene Σ dasselbe Verhalten zeigt, wie das (n-1)-dimensionale Lebesgue-Maß. Die Theorie aus § 1 gibt hier nur Information auf $\Omega - \Sigma$, also außerhalb des Trägers von μ (denn dort löst u das homogene System und ist somit von der Klasse $C^{1,\alpha}$). Nicht klar nach der bisherigen Regularitätstheorie ist das Verhalten von u in der Nähe von Σ und auf Σ selbst: A priori ist es durchaus denkbar, daß u bei Annäherung $\Omega - \Sigma \ni y \to y_o \in \Omega \cap \Sigma$ unbegrenzt anwächst oder sich so irregulär verhält, daß $\fint_{B_\rho(y_o)} u\,dx$ bei $\rho \downarrow o$ keinen Grenzwert hat. Nach dem Satz können beide Fälle nicht eintreten.

2) Zur Vereinfachung nehmen wir im Beweis des Satzes an, daß die μ^i selbst schon Radon-Maße auf Ω endliche Masse sind. (Speziell gilt also $\mu^i \geq o$.) Andernfalls argumentiert man getrennt für μ^i_+ und μ^i_-. Die Integrabilitätsbedingung (5.7) bedeutet insbesondere, daß Punkte in Ω Nullmengen bzgl. der Maße $\mu^i, i = 1,..,N$, sind.

Für den Beweis des Satzes benötigen wir

Lemma 5.1: Die Voraussetzungen (5.1) seien gültig. Zu $y \in \Omega$ findet man eine positive Zahl R_y, die abhängt von $n,N,\lambda,\Lambda,\alpha,L$ und $\operatorname{dist}(y,\partial\Omega)$ mit

(5.9)

a) $|G^\rho(x,y)| \leq C_1|x-y|^{2-n} + C_2 R_y^{\alpha-n+1}$

b) $|G(x,z)| \leq C_1|x-z|^{2-n} + C_2 R_y^{\alpha-n+1}$

für alle $o < \rho < R_y$, $x,z \in B_{R_y}(y)$. C_1, C_2 sind die Konstanten aus Satz 8 mit $\beta := \alpha$. Offenbar gilt (5.9) unverändert,

wenn man G durch ${}^tG$ ersetzt.

Beweis: Sei $y \in \Omega$. Nach Satz 8 gilt (mit den Bezeichnungen von dort und mit der Wahl $\beta := \alpha$) für alle $z \in \Omega$

$$(*) \quad |G(x,z)| \le C_1|x-z|^{2-n} + C_2 R^{\alpha-n+1} \quad \forall x \in B_{2R}(z),$$

$$0 < R \le \min(R_o, \tfrac{1}{4}\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)).$$

Sei $R_y := \frac{1}{2}\min(R_o, \frac{1}{4}\operatorname{dist}(y,\partial\Omega))$. Wählen wir $z \in B_{R_y}(y)$, so gilt (*) offenbar mit der Setzung $R := R_y$ für alle $x \in B_{R_y}(y)$ (beachte: $R_y \le \min(R_o, \frac{1}{4}\operatorname{dist}(z,\partial\Omega))$ für Punkte $z \in B_{R_y}(y)$), es folgt: (**) $|G(x,z)| \le C_1|x-z|^{2-n} + C_2 R_y^{\alpha-n+1}$ für alle $x,z \in B_{R_y}(y)$. Damit ist Teil b) verifiziert. Benutzen wir die Formeln aus Satz 4 und Korollar 2, so gilt für $0 < \rho \le R_y$ und $x \in B_{R_y}(y)$ gemäß (**):

$$|G^\rho(x,y)| \le \fint_{B_\rho(y)} |G(x,z)|dz \le C_1\rho^{-n} \int_{B_\rho(y)} |x-z|^{2-n}dz + C_2 R_y^{\alpha-n+1}$$

Im Fall $|x-y| \ge 2\rho$ haben wir für $z \in B_\rho(y)$ $|x-z| \ge \frac{1}{2}|x-y|$, also

$$\rho^{-n} \int_{B_\rho(y)} |x-z|^{2-n}\,dz \le C_1|x-y|^{2-n},$$

woraus sich (5.9) a) ergibt.

Für $|x-y| \le 2\rho$ gilt die Abschätzung

$$\rho^{-n} \int_{B_\rho(y)} |x-z|^{2-n}\,dz \le C_1\,\rho^{2-n} \le C_1|x-y|^{2-n}$$

Der Beweis für ${}^tG$ ist derselbe, da alle Sätze in § 4 auch für ${}^tG$ statt G gelten.

Lemma 5.2: Sei ν unter den Voraussetzungen (5.1) ein Radon-Maß

endlicher Masse auf Ω mit der Eigenschaft

(5.10) $\int_{\Omega} |x-y|^{2-n} \, d\nu(x) < \infty$

für alle Punkte y aus einer offenen Teilmenge U von Ω.

Dann findet man zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Kugel $B_r(y) \subset U$ mit

$$\sup_{z \in B_r(y)} \int_{B_r(y)} |x-z|^{2-n} \, d\nu(x) \leq \varepsilon .$$

Beweis: Wäre die Behauptung falsch, so könnte man ein $\varepsilon > 0$ finden und dazu in jeder Kugel $B_r(y) \subset U$ einen Punkt z mit (+) $\int_{B_r(y)} |x-z|^{2-n} d\nu(x) > \varepsilon$. Sei $\overline{B_o}$ eine abgeschlossene Kugel in U. Zu B_o wähle man $z_1 \in B_o$ mit (+). Der Punkt z_1 besitzt eine offene Umgebung V mit $\int_{B_o} |x-z|^{2-n} d\nu(x) > \varepsilon$ für alle $z \in V$, andernfalls gibt es eine Folge $z_k \xrightarrow[k\to\infty]{} z_1$ mit $\int_{B_o} |x-z_k|^{2-n} d\nu(x) \leq \varepsilon$. Offenbar gilt $|x-z_k|^{2-n} \xrightarrow[k\to\infty]{} |x-z_1|^{2-n}$ punktweise auf Ω bis auf den Ausnahmepunkt z_1. Da jedoch nach (5.10) Punkte in Ω ν-Maß o haben, liegt punktweise Konvergenz ν- fast überall vor. Deshalb können wir das Lemma von Fatou andwenden und erhalten den Widerspruch $\int_{B_o} |x-z_1|^{2-n} d\nu(x) \leq \varepsilon$. Folglich gibt es eine abgeschlossene Kugel $\overline{B_1}$ um z_1 mit

(i) $\overline{B_1} \subset B_o$ (ii) diam $B_1 \leq \frac{1}{2}$diam B_o

(iii) $\int_{B_o} |x-z|^{2-n} \, d\nu(x) > \varepsilon$ für alle $z \in \overline{B_1}$

So fortfahrend gewinnt man eine Folge $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}_o}$ von Kugeln in U und Mittelpunkten $z_k, k \in \mathbb{N}_o$, so daß gilt:

(i) $\overline{B_{k+1}} \subset B_k$ (ii) diam $B_{k+1} \leq \frac{1}{2}$diam B_k

(iii) $\int_{B_k} |x-z|^{2-n} d\nu(x) > \varepsilon$ für alle $z \in \overline{B_{k+1}}$

Offenbar gibt es einen Punkt z^* mit $z_k \xrightarrow[k\to\infty]{} z^*$. Gemäß $z^* \in \bigcap_{k=o}^{\infty} \overline{B_k}$ ist $\int_{B_k} |x-z^*|^{2-n} d\nu(x) > \varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}_o$, Widerspruch!

Beweis des Satzes: (i) Sei $y \in \Omega$ fest. R_y sei der in Lemma 5.1 definierte Radius. Nach Satz 4 und Korollar 2 (mit G ersetzt durch ${}^tG$) gilt für $x \neq y$

$${}^tG^\rho(x,y) = \fint_{B_\rho(y)} G(z,x)^T dz \xrightarrow[\rho\downarrow 0]{} G(y,x)^T = {}^tG(x,y),$$

wo wir die Stetigkeit von $G(\cdot,x)$ in y benutzt haben. Folglich gilt ${}^tG^\rho(\cdot,y) \xrightarrow[\rho\downarrow 0]{} {}^tG(\cdot,y)$ μ^i - fast überall punktweise auf Ω, $i = 1,..,N$. Für $k = 1,..,N$ ist

$$\fint_{B_\rho(y)} u^k dx = \int_\Omega {}^tG_k^{\rho i}(x,y) d\mu^i(x) = \int_{\Omega - B_{R_y}(y)} \ldots + \int_{B_{R_y}(y)} \ldots .$$

Die oben festgestellte punktweise Konvergenz ergibt mit (5.9) und (5.7) nach dem Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz $\int_{B_{R_y}(y)} {}^tG_k^{\rho i}(x,y) d\mu^i(x) \xrightarrow[\rho\downarrow 0]{} \int_{B_{R_y}(y)} {}^tG_k^i(x,y) d\mu^i(x)$. Dasselbe soll auch für die Integrale über $\Omega \setminus B_{R_y}(y)$ gezeigt werden: Nach der Anmerkung zu Lemma 3.3 (entsprechend für ${}^tG$ formuliert) gilt für alle reellen Exponenten $q \geq 1$ die Abschätzung

$$\| {}^tG(\cdot,y) \|_{H^{1,q}(\Omega - B_{R_y}(y), \mathbb{R}^{N^2})} \leq C(q,n,N,\lambda,\Lambda,\alpha,L,\Omega,B_{R_y}(y)),$$

und aus der Herleitung dieser Beziehung folgt, daß sie unverändert für ${}^tG^\rho(\cdot,y)$ statt ${}^tG(\cdot,y)$ richtig ist, wenn wir $\rho \leq \frac{1}{2} R_y$ annehmen. Wählen wir z.B. $q := \frac{n}{1-\alpha}$, so sind nach Lemma O.1 (v) ${}^tG(\cdot,y)$ und ${}^tG^\rho(\cdot,y)$ durch dieselbe von ρ unabhängige Konstante beschränkt auf $\Omega \setminus B_{R_y}(y)$. Daher können wir wieder mit dem Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz die Gültig-

keit von $\int_{\Omega-B_{R_y}(y)} {}^tG_k^{\rho i}(x,y)\,d\mu^i(x) \xrightarrow[\rho\downarrow 0]{} \int_{\Omega-B_{R_y}(y)} {}^tG_k^{i}(x,y)\,d\mu^i(x)$

schließen. Es folgt (i).

(ii) Seien $\varepsilon > 0$ und $B_R(y_o) \subset \Omega$ gegeben. Gemäß Lemma 5.2 findet man eine Kugel $B_r(y) \subset B_R(y_o)$ mit

$$\sup_{z\in B_r(y)} \sum_{i=1}^{N} \int_{B_r(y)} |x-z|^{2-n}\,d\mu^i(x) \le \frac{\varepsilon}{8C_1}\,,\quad C_1 \text{ aus Lemma 5.1.}$$

O.E. gelte $r \le R_y$. Für $\rho < r$ und $z_1, z_2 \in B_\rho(y)$ ist nach (i)

$$|u(z_1)-u(z_2)| \le \sum_{i=1}^{N} \int_{B_r(y)} |{}^tG^i(x,z_1)-{}^tG^i(x,z_2)|\,d\mu^i(x) + \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega-B_r(y)} \ldots. =: a+b$$

$$\text{mit } a \le 2C_1 \sup_{z\in B_r(y)} \sum_{i=1}^{N} \int_{B_r(y)} |x-z|^{2-n}\,d\mu^i(x) + 2C_2\, R_y^{\alpha-n+1} \sum_{i=1}^{N} \mu^i(B_r(y))$$

$$\le \frac{\varepsilon}{4} + 2C_2\, R_y^{\alpha-n+1} \sum_{i=1}^{N} \mu^i(B_r(y))\,.$$

Gemäß $\mu^i(\Omega) < \infty$ gilt $\mu^i(B_r(y)) \xrightarrow[r\to 0]{} 0$ (Punkte haben Masse 0); wir wählen also r so klein, daß $2C_2 R_y^{\alpha-n+1} \sum_{i=1}^{N} \mu^i(B_r(y)) \le \frac{\varepsilon}{4}$ wird, mithin $a \le \frac{\varepsilon}{2}$. Sei jetzt $x \in \Omega - B_r(y)$. $G_l(\cdot,x)$, $l = 1,..,N$, löst auf $B_r(y)$ das homogene System $L_{ij}v^j = 0$, mit $p := \frac{n}{n-\alpha}$, $q := \frac{n}{1-\alpha}$ gilt nach Korollar 2 zu Satz 2:

$$*\|G_l(\cdot,x)\|_{H^{1,q}(B_{\frac{r}{2}}(y),\mathbb{R}^N)} \le C\, r^{1-n} *\|G_l(\cdot,x)\|_{H^{1,p}(B_r(y),\mathbb{R}^N)} \le C\cdot r^{-n}$$

mit der Konstanten C aus Lemma 3.1 (iii). Lemma 0.3 ergibt

$$|G(v,x)-G(w,x)| \le C\, r^{-n}\, |v-w|^{\alpha} \quad \text{für alle } v,w \in B_{\frac{r}{2}}(y)$$

Für $\rho \le \frac{r}{2}$ folgt gemäß $|{}^tG(x,z_1)-{}^tG(x,z_2)| = |G(z_1,x)-G(z_2,x)|$:

$$b \le C\, r^{-n}\, \rho^{\alpha} \sum_{i=1}^{N} \mu^i(\Omega),$$

und bei genügend kleiner Wahl von ρ offenbar auch $b \le \frac{\varepsilon}{2}$, was insgesamt $\operatorname{osc}_{B_\rho(y)} u \le \varepsilon$ beweist.

Es gelte nun (5.4). Sei $y \in \Omega$. Für $z \in B_{\frac{1}{2}R_y}(y)$ ist nach (i)

$$|u(z)| \le \int_\Omega |{}^tG^i(x,z)|\,d\mu^i(x) \le C_1 \sum_{i=1}^{N} \int_{B_{R_y}(y)} |x-z|^{2-n}\, d\mu^i(x) + C_2\, R_y^{\alpha-n+1} \sum_{i=1}^{N} \mu^i(\Omega)$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega - B_{R_y}(y)} |{}^tG^i(x,z)|\,d\mu^i(x)$$

Der erste Summand rechts ist beschränkt durch $C_1 \cdot M$, der zweite Summand hängt nicht von z ab. Beim dritten Term argumentiert man wie eben: Für $l \in \{1,..,N\}$ und $x \in \Omega - B_{R_y}(y)$ löst $G_l(\cdot,x)$ auf $B_{R_y}(y)$ das homogene System, ist also insbesondere beschränkt auf $B_{\frac{1}{2}R_y}(y)$ durch eine von x unabhängige Konstante (Korollar 2 zu Satz 2 mit den oben definierten p und q und Lemma 0.1 (v)).

Somit ist gezeigt: $\sup_{z \in B_{\frac{1}{2}R_y}(y)} |u(z)| < \infty$, und da $y \in \Omega$ beliebig war, ist alles bewiesen.

QED

Der vorstehende Satz ermöglicht die Übertragung einiger Ergebnisse aus der Regularitätstheorie elliptischer Systeme mit

quadratischem Wachstum im Gradienten, wie sie von Hildebrandt und Widman ([11]) für den Spezialfall eines skalaren Hauptteils mit allerdings nur meßbaren Koeffizienten bewiesen worden sind.

Satz 13: Die Voraussetzungen (5.1) seien erfüllt. Die Funktion $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN} \ni (x,y,p) \to f(x,y,p) \in \mathbb{R}^N$ habe folgende Eigenschaften

(5.11) (i) mit Konstanten $a,b \geq 0$ gilt

$|f(x,y,p)| \leq a|p|^2 + b$ für alle $(x,y,p) \in \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN}$

(ii) für $w \in H^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ ist $f(\cdot,w,\nabla w)$ meßbar.

Sei $u \in \overset{o}{H}{}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ schwache Lösung von $L_{ij}u^j = f^i(\cdot,u,\nabla u)$, $i = 1,..,N$, auf Ω mit

(5.12) $\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \cdot |x-y|^{2-n}\, dx < \infty$ für alle $y \in \Omega$.

Dann gilt:

(a) Jeder Punkt $y \in \Omega$ ist Lebesgue-Punkt von u. Folglich kann man u punktweise definieren und hat die Darstellungsformel

$$u^k(y) = \int_\Omega {}^tG^i_k(x,y) f^i(x,u(x),\nabla u(x))\,dx = \int_\Omega G^k_i(y,x) f^i(x,u(x),\nabla u(x))\,dx$$

für alle $y \in \Omega$ und $k = 1,..,N$.

(b) u ist α-Hölder stetig differenzierbar auf einer offenen und dichten Teilmenge Ω_o von Ω.

Anmerkungen: Wir verlangen nicht (wie in den Arbeiten [10], [11] von Hildebrandt und Widman) die Beschränktheit der schwachen Lösung, stattdessen aber Nullrandwerte im verallgemeinerten Sinn. Die Aussagen (a) und (b) gelten auch dann, wenn man die Forderung $u \in \overset{o}{H}{}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ ersetzt durch $u \in H^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^N)$, allerdings muß man dann die Darstellungsformel rechts durch

$v^k(y)$ ergänzen, wo $v \in H^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ die schwache Lösung von $L_{ij}v^j \equiv o$ auf Ω ist mit $u - v \in \overset{o}{H}{}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)$.

Beweis des Satzes: Für $i = 1,..,N$ sei μ^i das Lebesgue-Maß auf Ω versehen mit dem Gewicht $f^i(\cdot,u,\nabla u)$. Nach (5.11) ist $\mu \in M(\Omega)^N$, und die eindeutige Lösung $u_\mu \in \bigcap_{1\le r<\frac{n}{n-1}} \overset{o}{H}{}^{1,r}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ von $L_{ij}u^j_\mu = \mu^i$ ist trivialerweise gleich u. Somit ist (a) klar nach dem vorhergehenden Satz, denn (5.11)(i) und (5.12) implizieren (5.7).

Sei $y_o \in \Omega$ beliebig, U sei beliebige offene Umgebung von y_o in Ω. Teil (ii) des vorigen Satzes ergibt $\operatorname{osc}_{B_r(y)} u < \lambda/a$ für eine geeignete Kugel $B_r(y) \subset U$. Nach [7], Thm. 1.3, p. 178, findet man $D \subset B_r(y)$ offen und dicht in $B_r(y)$, so daß u auf D zu jedem Exponent $\in]o,1[$ Hölder-stetig ist (in [7] wird $2\cdot a \sup_{B_r(y)} |u| < \lambda$ verlangt, tatsächlich reicht die Bedingung an die Oszillation). Es gilt: $x_o \in D \Leftrightarrow \lim_{\tau\downarrow o} \tau^{2-n} \int_{B_\tau(x_o)} |\nabla u|^2 dx = o$ Das ist aber nach (5.12) in jedem Punkt $x_o \in \Omega$ der Fall, also $D = B_r(y)$.

Es sei jetzt $\Omega_o := \{z \in \Omega$: es gibt ein $\rho > o$ mit $B_\rho(z) \subset \Omega$ und $u \in C^o(B_\rho(z),\mathbb{R}^N)\}$. Per Definition ist Ω_o offen, das Argument von oben zeigt: Ω_o liegt dicht in Ω. Wie schon gesagt ist u zu jedem Exponent lokal Hölder-stetig auf Ω_o. Die in (b) behauptete Aussage folgt dann nach [7], Thm. 1.5, p. 184.

QED

§ 6 Anwendungen der lokalen Ergebnisse aus § 1

Wir beginnen mit einem Liouville-Satz für schwache Lösungen des Systems

(6.1) $-D_\alpha(A_{\alpha\beta}^{ij}(x,u(x))D_\beta u^j) = o$, $i = 1,..,N$, auf $\mathbb{R}^n$.

Man findet dieses Resultat in der Arbeit [16] von Meier (Theorem 1, Theorem 3), wo unter der Voraussetzung, daß die Koeffizienten "nur wenig von Konstanten abweichen", gezeigt wird, daß jede beschränkte schwache Lösung von (6.1) auf $\mathbb{R}^n$ konstant ist. Wir erhalten mit unseren Methoden auf anderem Wege dasselbe Ergebnis: unter oben genannter Kleinheitsvoraussetzung sind die lokalen Abschätzungen aus § 1 nämlich globaler Natur und ermöglichen es daher, das Verhalten einer Lösung von (6.1) auf ganz $\mathbb{R}^n$ zu beschreiben. Folgende Voraussetzungen an die Koeffizienten von (6.1) seien erfüllt:

(6.2) (a) Seien $A_{\alpha\beta}^{ij} \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N)$, $i,j = 1,..,N$, $\alpha,\beta = 1,..,n$, mit der Eigenschaft, daß $A_{\alpha\beta}^{ij}(\cdot,u)$ für alle $u \in H^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^N)$ eine meßbare Funktion ist. Mit positiven Zahlen λ,Λ gelte für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^N$, $\xi \in \mathbb{R}^{nN}$

(i) $A_{\alpha\beta}^{ij}(x,y)\xi_\alpha^i\xi_\beta^j \geq \lambda|\xi|^2$

(ii) $\sup\{|A_{\alpha\beta}^{ij}(x,y)| : x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^N, i,j = 1,..,N, \alpha,\beta = 1,..,n\} \leq \Lambda$

(b) Für $i,j = 1,..,N$, $\alpha,\beta = 1,..,n$ seien $a_{\alpha\beta}^{ij} \in \mathbb{R}$ mit (i) und $|a_{\alpha\beta}^{ij}| \leq \Lambda$

Dann gilt der folgende

Satz 14: Die Voraussetzungen (6.2) seien mit $n \geq 3$ erfüllt. $u \in H^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ sei schwache Lösung von (6.1). Zu jedem $\delta \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \delta < 1$ findet man eine positive Konstante $\varepsilon := \varepsilon(n,N,\lambda,\Lambda,\delta)$ mit der Eigenschaft, daß die Lösung u konstant ist, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(6.3) $\sup\{|A^{ij}_{\alpha\beta}(x,u(x)) - a^{ij}_{\alpha\beta}| : x \in \mathbb{R}^n, i,j = 1,..,N, \alpha,\beta = 1,..,n\} \leq \varepsilon$

(6.4) $R^{-\delta} \sup_{B_R(o)} |u| \to 0$ bei $R \uparrow \infty$

Anmerkungen: 1) Insbesondere hat man den von Frehse [6] bewiesenen Liouville-Satz für den Fall konstanter Koeffizienten.
2) Gemäß (6.4) darf die betrachtete Funktion u a priori anwachsen, allerdings ist nur sublineares Wachstum erlaubt. Ein Gegenbeispiel von Meier in [16] zeigt, daß man die Aussage von Satz 14 im Fall $\delta = 1$ nicht mehr erwarten kann.
3) Wir weisen darauf hin, daß bei Meier [16] die Kleinheitsbedingung (6.3) nur im Unendlichen erfüllt sein muß, d.h. $|A^{ij}_{\alpha\beta}(x,u(x)) - a^{ij}_{\alpha\beta}| \leq \varepsilon$ gilt für alle x außerhalb einer genügend großen Kugel um o.

Beweis von Satz 14: Zunächst definiert man für reelle Exponenten $p \geq 1$ und Radien $R > 0$ die Potentialoperatoren $P_R, \tilde{P}_R, T^p_R$ wie in § 1, Seite 38, 41, und zwar bezogen auf die konstanten Koeffizienten $a^{ij}_{\alpha\beta}$ (man bildet dazu den Kern K mit diesem Koeffizienten), wobei in der Definition von T^p_R $A^{ij}_{\alpha\beta}(x) := A^{ij}_{\alpha\beta}(x,u(x))$, $x \in \mathbb{R}^n$, zu setzen ist. Dann gelten Lemma 1.1 - Lemma 1.4 aus § 1 unverändert, insbesondere hat man nach (1.8)

(6.5) $^*\|T_R^p\| \le C(n,N,\lambda,\Lambda,p)\ \omega(R)$,

$$\omega(R) := \sup\{|A_{\alpha\beta}^{ij}(x) - a_{\alpha\beta}^{ij}| : x \in B_R(o), i,j=1,..,N,\ \alpha,\beta = 1,..,n\}$$

für die Norm der Operatoren $T_R^p : H^{1,p}(B_R(o),\mathbb{R}^N) \to H^{1,p}(B_R(o),\mathbb{R}^N)$, $p > 1$, $R > o$, wenn man den Sobolev-Raum $H^{1,p}(B_R(o),\mathbb{R}^N)$ durch

$$^*\|v\|_{p,R} := \frac{1}{R}\|v\|_{L^p(B_R(o),\mathbb{R}^N)} + \|\nabla v\|_{L^p(B_R(o),\mathbb{R}^{nN})}$$

normiert.

Sei $1 < p < \frac{n}{n-1}$ vorerst noch beliebig, $s_k := \frac{np}{n-kp}$, $k = o,..,n-1$.

Wir verlangen

(6.6) $\omega(\infty) \le \frac{1}{2}(\max\{C(n,N,\lambda,\Lambda,s_k) : k = o,..,n-1\})^{-1}$, C wie in (6.5)

Das bedeutet nach (6.5) $^*\|T_R^{s_k}\| \le \frac{1}{2}$ für alle $R > o$, $k = o,..,n-1$.

Der Beweis von Lemma 1.6 läßt sich übertragen mit dem Ergebnis $u \in H^{1,q}_{loc}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^N)$, $q := s_{n-1} > n$, überdies gilt die Abschätzung

(6.7) $^*\|u\|_{q,R} \le R^{1-n}\ c\ ^*\|u\|_{p,2R}$, $c = c(n,N,\lambda,\Lambda,p)$, aus Korollar 2

zu Satz 2, und zwar jetzt für alle $R > o$. Nachfolgend benennen wir alle Konstanten, die von n,N,λ,Λ,p abhängen, mit dem Symbol c.

Sei $R > o$ fest, $D := B_{\frac{R}{4}}(o)$. Für $x_o \in D$, $o \le \rho \le \operatorname{diam}(D)$ ist nach Lemma 0.2

$$\int_{B_\rho(x_o)} |u - (u)_{x_o,\rho}|^2\,dx \le c\cdot\rho^2 \int_{B_\rho(x_o)} |\nabla u|^2\,dx \le$$

$$c\ \rho^2\cdot\rho^{n-\frac{2n}{q}}\ \|\nabla u\|^2_{L^q(B_R(o),\mathbb{R}^{nN})} \overset{(6.7)}{\le} c\cdot\rho^{n+2-\frac{2n}{q}}\ (R^{1-n}\ ^*\|u\|_{p,2R})^2$$

Also gilt $u \in L^{2,\tau}(B_{\frac{R}{4}}(o),\mathbb{R}^N)$, $\tau := n+2-\frac{2n}{q}$, Lemma 0.3 ergibt

mit $\alpha = 1-\frac{n}{q}$

$$\Phi(\tfrac{R}{4}) := \sup_{x\neq y\in B_{\frac{R}{4}}(o)} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \leq c\ R^{1-n*}\|u\|_{p,2R}$$

$$\leq c\ R^{1-n}\ R^{\frac{n}{p}-\frac{n}{2}*}\|u\|_{2,2R}$$

Test von (6.1) mit $\eta^2 u$, $\eta \in C^{\infty}_{kpt}(B_{4R}(o),[o,1])$, $\eta \equiv 1$ auf $B_{2R}(o)$, $|\nabla\eta| \leq \frac{2}{R}$ liefert

$\|\nabla u\|_{L^2(B_{2R}(o),\mathbb{R}^{nN})} \leq \frac{c}{R}\|u\|_{L^2(B_{4R}(o),\mathbb{R}^N)}$, zusammen:

(6.8) $\Phi(\frac{R}{4}) \leq c\cdot R^{\frac{n}{p}-n} M(4R)$, $M(4R) := \sup_{B_{4R}(o)} |u|$, für alle $R>o$

Sei nun $o \leq \delta < 1$ gegeben. Man wähle $p := \frac{1}{2}(\frac{n}{n-1}+\frac{n}{n-\delta})$, also $\frac{n}{n-1} > p > \frac{n}{n-\delta}$, und verlange (6.6) mit diesem p, was die Bedingung (6.3) ergibt. Nach (6.4)/(6.8) folgt $\Phi(R) \to o$ bei $R \to \infty$, und da Φ eine monoton wachsende, nicht-negative Funktion ist, gilt $\Phi = o$, was die Behauptung beweist.

QED

Wie schon am Ende von § 1 bemerkt wurde, können wir das gerade benutzte Kleinheitsargument auch dazu verwenden, Regularität schwacher Lösungen des Systems

(6.9) $-D_{\alpha}(A^{ij}_{\alpha\beta}(x,u(x))D_{\beta}u^j(x)) = f^i(x) - D_{\alpha}F^i_{\alpha}(x)$ auf Ω, $i=1,..,N$

zu beweisen.

In [7], Thm. 1.1, p. 164, findet man die Aussage, daß jede $H^{1,2}_{loc}$ - Lösung von (6.9) lokal Hölder-stetig ist auf einer offenen und dichten Teilmenge von Ω, wenn die Funktionen f, F zu einer genügend großen Potenz integrierbar sind, vorausgesetzt die Koeffizienten $A^{ij}_{\alpha\beta}(x,y)$ sind stetige Funktionen auf $\Omega \times \mathbb{R}^N$. Ebenfalls in [7] (p. 181) wird bemerkt, daß die "Ausnahmemenge" leer ist, wenn die Koeffizienten die folgenden Bedingungen erfüllen:

(6.10) a) $A^{ij}_{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^N)$, $i,j = 1,..,N$, $\alpha,\beta = 1,..,n$

b) Symmetrie: $A^{ij}_{\alpha\beta} = A^{ji}_{\beta\alpha}$, $i,j = 1,..,N$, $\alpha,\beta = 1,..,n$

c) Elliptizität: $\lambda|\xi|^2 \le A^{ij}_{\alpha\beta}(x,y)\xi^i_\alpha\xi^j_\beta \le L|\xi|^2$

für alle $x \in \Omega$, $y \in \mathbb{R}^N$, $\xi \in \mathbb{R}^{nN}$ mit positiven Konstanten λ, L

d) $\frac{\lambda}{L}$ liegt hinreichend nahe bei 1

e) für alle $u \in H^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ ist $A^{ij}_{\alpha\beta}(\cdot,u)$ meßbar.

Man vergleicht dann den Differentialoperator $-D_\alpha(A^{ij}_{\alpha\beta}(\cdot,u)D_\beta u^j)$ mit dem Laplace-Operator, wobei (6.10) (d) die Information liefert, daß schwache Lösungen von (6.9) dieselben Regularitätseigenschaften haben wie schwache Lösungen der zugehörigen Poisson-Gleichung. Unsere Methode ergibt:

Satz 15: Die Voraussetzungen (6.2) seien statt auf $\mathbb{R}^n$ auf dem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \ge 3$, erfüllt. Dann gibt es zu jedem reellen $q > n$ eine Konstante $\varepsilon := \varepsilon(n,N,\lambda,\Lambda,q) > 0$ mit folgender Eigenschaft:

Ist $u \in H^{1,2}_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ schwache Lösung von (6.9) mit $F \in L^q_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^{nN})$, $f \in L^{\frac{q}{2}}_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, so gilt

$u \in C^{o,1-\frac{n}{q}}_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, vorausgesetzt

$$\sup\{\|A^{ij}_{\alpha\beta}(\cdot,u) - a^{ij}_{\alpha\beta}\|_{L^\infty(\Omega)} : i,j=1,..,N,\ \alpha,\beta = 1,..,n\} \le \varepsilon.$$

□

Der Beweis von Satz 15 verläuft wie der Beweis von Lemma 1.6 ausgehend vom Exponent $p := \frac{nq}{n+(n-1)q} \in]1,\frac{n}{n-1}[$. (beachte: der in Lemma 1.6 definierte Exponent s ist kleiner als $\frac{q}{2}$). Die Schranke ε errechnet sich wie in Satz 14.

Wir benutzen jetzt die in § 1 bei stetigen Koeffizienten bewiesenen lokalen Abschätzungen für schwache Lösungen elliptischer Systeme, um ein "Weylsches Lemma" ([18], Thm 2.3.1) für "ganz schwache" L^p-Lösungen u von

(6.11) $\int_\Omega L_{ij}\phi^j\, u^i\, dx = \int_\Omega f^i\phi^i dx$ für alle $\phi \in C^\infty_{kpt}(\Omega,\mathbb{R}^N)$

zu beweisen, wobei wir annehmen

(6.12) (GV) von Seite 28 mit $n \ge 3$, $A^{ij}_{\alpha\beta} \in C^o(\bar{\Omega}) \cap C^{o,1}_{loc}(\Omega)$ für $i,j = 1,..,N$, $\alpha,\beta = 1,..,n$.

Satz 16: Es sei $p \in \mathbb{R}$ mit $p > 1$. Die Funktionen u,f seien aus $L^p_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^N)$. Gilt dann unter der Voraussetzung (6.12) die Integralrelation (6.11), so liegt u im Sobolev-Raum $H^{1,p}_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^N)$.

Man findet diesen Satz in [3], Theorem 7.1: Dort werden Differenzenquotienten $\Delta_h u$ betrachtet mit dem Ergebnis, daß

$\|\Delta_h u\|_{L^p_{loc}(\Omega)}$ für $|h|$ genügend klein unabhängig von h beschränkt werden kann; ein wohlbekannter Satz (z.B. [8], Lemma 7.24) ergibt die Behauptung. Unser Beweis benutzt neben den Sätzen aus § 1 nur den Rieszschen Darstellungssatz in L^p.

Wir bemerken noch, daß in der Situation des Satzes u schwache Lösung des Systems $L^t_{ij}u^j = f^i$, $i = 1,..,N$, auf Ω (im Sinne der Definition aus § 0) ist, was gemäß Satz 2 aus § 1 $u \in H^{1,s}_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ mit $s = \frac{np}{n-p}$ impliziert. Höhere Regularität folgt, wenn f entsprechend "gut" ist.

Beweis: Ohne Einschränkung sei $1 < p < \frac{n}{n-1}$, $p' := \frac{p}{p-1}$ ist dann $>n$. Sei $\psi \in C^\infty_{kpt}(\Omega)$ beliebig, $\tilde{u} := \psi u \in L^p_{kpt}(\Omega,\mathbb{R}^N)$. Durch Approximation gilt (6.11) auch für alle Testfunktionen $\phi \in H^{2,p'}_{kpt}(\Omega,\mathbb{R}^N)$. Wir wählen $\eta \in H^{2,p'}_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^N)$. Es gilt (gemäß $\psi\eta \in H^{2,p'}_{kpt}$)

$$\int_\Omega L_{ij}\eta^j \cdot \tilde{u}^i \, dx = \int_\Omega L_{ij}(\psi\eta^j)u^i dx + \int_\Omega M^i(\eta)u^i dx =$$

$$\int_\Omega f^i \psi \, \eta^i dx + \int_\Omega M^i(\eta)u^i dx \quad \text{mit}$$

$$M^i(\eta) := A^{ij}_{\alpha\beta} D_\alpha \psi \, D_\beta \, \eta^j + D_\alpha(A^{ij}_{\alpha\beta} \, \eta^j \, D_\beta \, \psi) \text{ für } i = 1,..,N.$$

M ist ein Differentialoperator erster Ordnung, dessen Koeffizienten außerhalb des Trägers von ψ verschwinden. Für $\phi \in C^\infty_{kpt}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ sei $S(\phi)$ die eindeutige schwache Lösung in $\overset{o}{H}{}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ von $L_{ij}v^j = \phi^i$, $i = 1,..,N$, auf Ω. Nach Korollar 1 zu Satz 2 gilt $S(\phi) \in \bigcap_{1\le r<\infty} H^{1,r}_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, und da wir Lipschitz-Koeffizienten haben, liefert das Differenzenquotientenverfahren

$v := S(\phi) \in H^{2,2}_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^N)$. Für $\gamma = 1,..,n$ gilt

$$L_{ij}(D_\gamma v^j) = -D_\alpha(A^{ij}_{\alpha\beta}\, D_\gamma(D_\beta\, v^j)) = D_\gamma\, \phi^i + D_\alpha(D_\gamma\, A^{ij}_{\alpha\beta}\, D_\beta v^j),\ i = 1,..,N.$$

Es sei $F^i_\alpha := \delta_{\alpha\gamma}\, \phi^i + D_\gamma\, A^{ij}_{\alpha\beta} \cdot D_\beta\, v^j$. Dann folgt

$$L_{ij}(D_\gamma\, v^j) = D_\alpha\, F^i_\alpha,\quad i = 1,..,N, \text{ schwach auf } \Omega,$$

und gemäß $F \in L^r_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^{nN})$ für alle $r < \infty$, liefert Satz 2 insbesondere $D_\gamma\, v \in H^{1,p'}_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, also $S(\phi) \in H^{2,p'}_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^N)$. Wählt man daher oben $\eta := S(\phi)$, so gilt die Identität

$$\underline{(6.13)} \quad \int_\Omega \phi^i \tilde{u}^i\, dx = \int_\Omega \psi\, s(\phi)^i f^i\, dx + \int_\Omega M^i(S(\phi))u^i\, dx$$

für alle Testfunktionen $\phi \in C^\infty_{kpt}(\Omega,\mathbb{R}^N)$. Sei D ein Gebiet, welches den Träger von ψ umfaßt und kompakten Abschluß in Ω hat. Dann gilt

$$\underline{(6.14)} \quad \Big|\int_\Omega M^i(S(\phi))u^i dx\Big| \le C \int_\Omega |u|\cdot\{|\nabla(S\phi)|+|S(\phi)|\}dx$$

$$\le C\cdot\|u\|_{L^p(D,\mathbb{R}^N)} \cdot \|S(\phi)\|_{H^{1,p'}(D,\mathbb{R}^N)},$$

wo die Konstante C bestimmt wird von $\|\psi\|_{H^{2,\infty}(D)}$ und

$$\sup\{\|A^{ij}_{\alpha\beta}\|_{H^{1,\infty}(D)} : i,j = 1,..,N,\ \alpha,\beta = 1,..,n\}.$$

Man wähle $1 < r < \frac{n}{n-1}$ so, daß p' der (n-1)-fach iterierte Sobolev-Exponent zu r ist, also $r := \frac{np}{2n\,p-n-p}$. Lemma 1.6 ergibt

$$\|S(\phi)\|_{H^{1,p'}(D,\mathbb{R}^N)} \le C\{\|\phi\|_{L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^N)} + \|S(\phi)\|_{H^{1,r}(\Omega,\mathbb{R}^N)}\}$$

mit einer Konstanten C abhängig von $n,N,\lambda,\Lambda,p,\Omega$ und D. Nun ist $r < 2$, also

$\|S(\phi)\|_{H^{1,r}(\Omega,\mathbb{R}^N)} \le C\cdot \|S(\phi)\|_{H^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)}$ nach der Hölder-Ungleichung. Test des Systems für $S(\phi)$ mit $S(\phi)$ liefert für alle $0<\varepsilon<1$ (mit Lemma 0.2)

$$\|\nabla(S\phi)\|^2_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^{nN})} \le C\{\varepsilon\cdot\|\nabla(S\phi)\|^2_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^{nN})} + \frac{1}{\varepsilon}\ \|\phi\|^2_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^N)}\}$$

Wählt man ε geeignet und setzt die Abschätzungen zusammen, so folgt (wieder mit Lemma 0.2)

$$\|S(\phi)\|_{H^{1,p'}(D,\mathbb{R}^N)} \le C\ \{\|\phi\|_{L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^N)} + \|\phi\|_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^N)}\} \le C\|\phi\|_{L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^N)}.$$

Gemäß (6.14) gilt daher mit einer endlichen von $\phi\in C^\infty_{kpt}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ unabhängigen Konstanten C

$$\left|\int_\Omega M^i(S(\phi))u^i dx\right| \le C\cdot\|\phi\|_{L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^N)}\ \|u\|_{L^p(D,\mathbb{R}^N)}$$

Folglich ist $\phi\to\int_\Omega M^i(S(\phi))u^i dx$ fortsetzbar zu einem linearen Funktional auf $L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, nach dem Rieszschen Darstellungssatz für $L^{p'}$ findet man eine Funktion $w\in L^p(\Omega,\mathbb{R}^N)$ mit der Eigenschaft

(6.15) $\int_\Omega M^i(S(\phi))u^i dx = \int_\Omega w^i\ \phi^i\ dx$ für alle $\phi\in C^\infty_{kpt}(\Omega,\mathbb{R}^N)$

Wir zeigen, daß w sogar schwach differenzierbar ist: Seien $\phi\in C^\infty_{kpt}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ und $\gamma\in\{1,..,n\}$. Für $v := S(D_\gamma\phi)$ gilt $L_{ij}v^j = D_\gamma\phi^i = -D_\alpha F^i_\alpha$, $F^i_\alpha := -\delta_{\alpha\gamma}\ \phi^i$, schwach auf Ω. Wie vorhin folgt mit Lemma 1.6

$$\left|\int_\Omega u^i\ M^i(S(D_\gamma\phi))dx\right| \le C\cdot\|u\|_{L^p(D,\mathbb{R}^N)}\cdot\|v\|_{H^{1,p'}(D,\mathbb{R}^N)}$$

$$\le C\cdot\|u\|_{L^p(D,\mathbb{R}^N)}\{\|v\|_{H^{1,r}(\Omega,\mathbb{R}^N)} + \|F\|_{L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^N)}\} \le C\cdot\|u\|_{L^p(D,\mathbb{R}^N)}\ \|\phi\|_{L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^N)}.$$

Wieder mit dem Satz von Riesz gibt es $\tilde{w}\in L^p(\Omega,\mathbb{R}^N)$ mit

$\int_\Omega u^i M^i(S(D_\gamma\phi))dx = \int_\Omega \tilde{w}^i\ \phi^i dx,$

ersetzt man also in (6.15) ϕ durch $D_\gamma\phi$, so folgt

$$\int_\Omega \tilde{w}^i\ \phi^i\ dx = \int_\Omega w^i\ D_\gamma\ \phi^i\ dx \qquad \forall\phi \in C^\infty_{kpt}(\Omega,\mathbb{R}^N)$$

und wegen der Beliebigkeit von γ schließlich $w \in H^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$.

Man schreibt nun (6.13) mit (6.15) in der Form

$$\int_\Omega \phi^i(\tilde{u}^i - [w^i + U^i])dx = 0 \qquad \forall\phi \in C^\infty_{kpt}(\Omega,\mathbb{R}^N),$$

wo $U \in \overset{o}{H}{}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ die eindeutige $\overset{o}{H}{}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$-Lösung des Systems $L^t_{ij}U^j = f^i\ \psi$, $i = 1,..,N$ auf Ω ist (man benutze Satz 1* für das transponierte System). Die letzte Integralbeziehung ergibt $\tilde{u} = w + U \in H^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, und da ψ beliebige Abschneidefunktion war, folgt Satz 16.

QED

Anmerkung: Mit dem gerade bewiesenen Satz können wir eine teilweise Antwort geben auf die Frage, ob das System $L_{ij}\,u^j = 0$, $i = 1,..,N$, auf Ω eine nicht-triviale Lösung u im Raum $\overset{o}{H}{}^{1,1}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ haben kann. (In Korollar 2 zu Satz 1 braucht man $u \in \overset{o}{H}{}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ für ein $p > 1$.) Dazu sei Ω ein Gebiet der Klasse C^2, und die Koeffizientenmatrix sei gleichmäßig Lipschitz-stetig auf Ω. Partielle Integration in der per Definition gültigen Beziehung $\int_\Omega A^{ij}_{\alpha\beta}\ D_\alpha\ \phi^i D_\beta\ U^j dx = 0$ ergibt $\int_\Omega L^t_{ij}\phi^j\ u^i dx = 0$ für alle $\phi \in C^\infty_{kpt}(\Omega,\mathbb{R}^N)$. Beachtet man $u \in L^{\frac{n}{n-1}}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ nach Lemma 0.1, so ergibt Satz 16 $u \in H^{1,q}_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ für alle $q \in \mathbb{R}$, $q \geq 1$. Die in [3], Thm. 8.2, vorgenommene Ausdehnung von Satz 16 bis zum Rand liefert sogar $u \in H^{1,q}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ für alle $1 \leq q < \infty$, also ([18],

Thm. 3.6.2) $u \in \overset{o}{H}{}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, was $u \equiv 0$ bedeutet. Folglich gilt Korollar 2 zu Satz 1 (bei Lipschitz-Koeffizienten und C^2-Gebieten) schon unter der Voraussetzung $u \in \overset{o}{H}{}^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Es ist ungeklärt, ob diese Aussage richtig ist, wenn man nur Stetigkeit der Koeffizienten weiß.

§ 7 Der zweidimensionale Fall: Konstruktion einer Green-Matrix bei nur meßbaren Leitkoeffizienten

In diesem Paragraphen behandeln wir den bisher ausgeschlossenen Fall n = 2 und wollen wie in § 3 eine Green-Matrix für die Matrix $(L_{ij})_{1\le i,j\le N}$ von Differentialoperatoren aus (GV)II konstruieren, wobei wir folgende Voraussetzungen machen:

(7.1) $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ ist ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, auf dem (GV)II/III gelten sollen.

Analog zur Vorgehensweise in § 2, § 3 beweisen wir allgemeiner die Existenz einer schwachen Lösung u mit Nullrandwerten des Systems $L_{ij}u^j = \mu^i$, i=1,...,N auf Ω, wenn ein vektorwertiges signiertes Radon-Maß $\mu = (\mu^1,\dots,\mu^N)$ von endlicher totaler Variation vorgegeben ist. Ausgangspunkt für diesen Existenzsatz bildet ein Korollar 1 zu Satz 1 entsprechender Regularitätssatz für das transponierte System

(7.2) $L^t_{ij}u^j = -D_\alpha F^i_\alpha$, i=1,...,N, auf Ω,

wo die rechte Seite F in einer Lebesgue-Klasse $L^p(\Omega,\mathbb{R}^{2N})$ mit reellem Exponent $p > 2$ liegt.

Satz 17: Es sei $F\in L^p(\Omega,\mathbb{R}^{2N})$ für ein reelles $p>2$. Unter den Voraussetzungen (7.1) sei $u\in \overset{o}{H}{}^{1,2}_{o}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ die eindeutige schwache Lösung von (7.2). Dann gilt $u\in C^o_o(\Omega,\mathbb{R}^N)$, und mit einer positiven Konstanten $C := C(N,\lambda,\Lambda,p,\Omega)$ ist

(7.3) $\sup_\Omega |u| \le C\,\|F\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^{2N})}$.

Anmerkungen: 1) Der Satz und sein Beweis setzen sich aus folgenden Resultaten in [7] zusammen: Theorem 2.2, p.138, Corollary 2.1, p.141, und den "Boundary estimates", p.149. 2) In Dimensionen $n \ge 3$ gilt Satz 17 unter sonst gleichen Voraussetzungen im allgemeinen nicht mehr, man braucht dann zusätzlich

"Kleinheitsbedingungen" wie (6.1o) d) oder der in Satz 15 angegebenen Form.

Beweis von Satz 17: Da Ω ein beschränktes Lipschitz-Gebiet ist, findet man positive Konstanten R_o, γ, die nur von der Geometrie des Gebietes bestimmt werden, mit folgender Eigenschaft: Sind $x,y \in \mathbb{R}^2$ und gilt $R < \frac{1}{2}\,\mathrm{dist}(x,\partial Q_{R_o}(y))$, so folgt aus

$Q_{\frac{3}{2}R}(x) \cap \Omega \neq \emptyset \neq Q_{\frac{3}{2}R}(x) \cap (Q_{R_o}(y) - \Omega)$ die Abschätzung

(a) $L^2(Q_{2R}(x) - \Omega) \geq \gamma L^2(Q_{2R}(x))$. Hierin ist für $r > o$ und $z \in \mathbb{R}^2$ $Q_r(z) := \{z^* \in \mathbb{R}^2 : |z^*_\alpha - z_\alpha| < r,\ \alpha = 1,2\}$. Aus der Kompaktheit von $\overline{\Omega}$ folgt die Existenz von endlich vielen Punkten $y_1,\ldots,y_m$ in $\overline{\Omega}$, $m \in \mathbb{N}$, mit (b) $\bigcup_{i=1}^{m} Q_{\frac{R_o}{4}}(y_i) \supset \Omega$. y sei einer der Punkte y_i. Wir wählen $x \in Q_{R_o}(y)$ und $o < R < \frac{1}{2} \cdot \mathrm{dist}(x,\partial Q_{R_o}(y))$. Folgende Fälle sind möglich:

(i) $Q_{\frac{3}{2}R}(x) \cap \Omega = \emptyset$ (ii) $Q_{\frac{3}{2}R}(x) \cap (Q_{R_o}(y) - \Omega) = \emptyset$ und

(iii) $Q_{\frac{3}{2}R}(x) \cap \Omega \neq \emptyset \neq Q_{\frac{3}{2}R}(x) \cap (Q_{R_o}(y) - \Omega)$

Fall (ii) : Sei $\eta \in C^\infty_{kpt}(Q_{\frac{3}{2}R}(x))$, $\eta = 1$ auf $Q_R(x)$, $o \leq \eta \leq 1$ und $|\nabla\eta| \leq 4/R$.

Setzt man $\bar{u} := \fint_{Q_{\frac{3}{2}R}(x)} u\,dz$ und testet (7.2) mit dem Vektor $\eta^2(u-\bar{u}) \in \overset{o}{H}{}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, so ergeben Standardabschätzungen mit einer positiven nur von N,λ,Λ abhängigen Konstanten C die Beziehung

$$\int_{Q_R(x)} |\nabla u|^2 dz \leq C \left\{\frac{1}{R^2} \int_{Q_{\frac{3}{2}R}(x)} |u-\bar{u}|^2 dz + \int_{Q_{\frac{3}{2}R}(x)} |F|^2 dz\right\} .$$

Auf das erste Integral rechts kann man Lemma o.1 (iii) anwenden, wenn man dort die Kugeln durch Quadrate ersetzt. Setzt man u und F durch o auf ganz $\mathbb{R}^2$ fort, so folgt:

(7.4) $$\fint_{Q_R(x)} |\nabla u|^2 dz \leq C\left\{\left(\fint_{Q_{2R}(x)} |\nabla u|\,dz\right)^2 + \fint_{Q_{2R}(x)} |F|^2 dz\right\}$$

Im Fall (i) ist (7.4) trivialerweise richtig.

Fall (iii) : Gemäß $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ gilt mit der Testfunktion η aus Fall (ii) auch $\eta^2 u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, Test von (7.2) mit $\eta^2 u$ liefert wie vorhin

$$\int_{Q_R(x)} |\nabla u|^2 dz \leq C \{\frac{1}{R^2} \int_{Q_{2R}(x)} |u|^2 dz + \int_{Q_{2R}(x)} |F|^2 dz\}$$

Nach (a) und Lemma o.1 (iv) (ersetze dort die Kugeln durch Quadrate, was eine Beweisdurchsicht des Lemmas rechtfertigt) gilt

$$\int_{Q_{2R}(x)} |u|^2 dz \leq C(\gamma) \left(\int_{Q_{2R}(x)} |\nabla u| dz \right)^2 ,$$

wo die positive Konstante $C(\gamma)$ bestimmt wird durch N,λ,Λ und γ. Das eingesetzt in die vorstehende Ungleichung ergibt (7.4) auch im Fall (iii). (7.4) gilt für alle Quadrate $Q_R(x)$ mit $x \in Q_{R_o}(y)$ und $o < R < \frac{1}{2}\mathrm{dist}(x,\partial Q_{R_o}(y))$. Lemma o.4 zeigt dann: es gibt positive Konstanten ε und C, die von $N,p,\lambda,\Lambda,\gamma$ abhängen, mit $\nabla u \in L^{2+\varepsilon}_{loc}(Q_{R_o}(y),\mathbb{R}^{2N})$ und

(7.5) $$\left(\int_{Q_R(x)} |\nabla u|^{2+\varepsilon} dz \right)^{\frac{1}{2+\varepsilon}} \leq C \left(\left\{ \int_{Q_{2R}(x)} |\nabla u|^2 dz \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int_{Q_{2R}(x)} |F|^{2+\varepsilon} dz \right\}^{\frac{1}{2+\varepsilon}} \right.$$

für alle $x \in Q_{R_o}(y)$, $o < R < \frac{1}{2}\,\mathrm{dist}(x,\partial Q_{R_o}(y))$. Wählt man hierin $x := y$, $R := R_o/4$, beachtet (b) und schätzt das Dirichlet-Integral von u über Ω durch die L^p-Norm von F über Ω nach oben ab (Test des Systems (7.2) mit u), so folgt aus (7.5) $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2+\varepsilon}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ mit

$$\|u\|_{H^{1,2+\varepsilon}(\Omega,\mathbb{R}^N)} \leq C(N,p,\lambda,\Lambda,\Omega) \, \|F\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^{2N})} .$$

Da wir n = 2 annehmen, ergibt Lemma o.1 (v) die Aussage des Satzes.

Q E D

Wie in § 2 auf Seite 56 definieren wir den Lösungsoperator $S: H^{-1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N) \longrightarrow \overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ und bezeichnen für Exponenten $p > 2$ mit S_p den stetigen Operator $H^{-1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N) \longrightarrow C^{\circ}_{o}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, der sich durch Einschränken von S auf $H^{-1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ nach Satz 17 ergibt. Nach dem Schema aus Paragraph 2 erhalten wir folgende Aussagen:

Lemma 7.1 : Die Voraussetzungen (7.1) an das Gebiet, die Koeffizienten und die Raumdimension seien gültig. Sei $\mu := (\mu^1,\ldots,\mu^N)$ ein vektorwertiges signiertes Radon-Maß endlicher totaler Variation auf Ω. Dann gilt:

(i) Für alle reellen Exponenten $p, q > 2$ ergeben $S_p^*(\mu)$ und $S_q^*(\mu)$ dieselbe Funktion (u_μ genannt) im Sobolev-Raum $\overset{\circ}{H}{}^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Es gilt $u_\mu \in \bigcap_{1\le r<2} \overset{\circ}{H}{}^{1,r}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ mit

(7.6) $\|u_\mu\|_{H^{1,r}(\Omega,\mathbb{R}^N)} \le C \, \|\mu\|(\Omega)$ für alle $1\le r<2$.

Die Konstante C wird bestimmt durch r,N,λ,Λ und Ω.

(ii) u_μ ist schwache Lösung des Systems $L_{ij}u^j = \mu^i$, $i=1,\ldots,N$, auf Ω, erfüllt also die Integralrelation $\int_\Omega A^{ij}_{\alpha\beta} D_\alpha v^i D_\beta u^j_\mu \, dx = \int_\Omega v^i \, d\mu^i$ für alle $v \in C^\infty_{kpt}(\Omega,\mathbb{R}^N)$.

Beweis : (i) vgl. Lemma 2.1, 2.2, 2.3 und benutze die Abschätzung (7.3), um (7.6) zu schließen. Lemma 2.3 muß allerdings geringfügig modifiziert werden, denn die eindeutige schwache Lösung u in $\overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ von (7.2) mit rechter Seite $F \in L^p(\Omega,\mathbb{R}^{2N})$ für $p > 2$ liegt nicht mehr in $\overset{\circ}{H}{}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, sondern nur in einem Sobolev-Raum $\overset{\circ}{H}{}^{1,\tilde{p}}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ mit einem gewissen $\tilde{p}$ zwischen 2 und p. Das folgt aus dem Beweis von Satz 17. Daher müssen wir die Operatoren Σ_p (vgl. Seite 57) ersetzen durch $\tilde{\Sigma}_p$: $H^{-1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N) \longrightarrow \overset{\circ}{H}{}^{1,\tilde{p}}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, $\tilde{\Sigma}_p(T) := S(j_{\tilde{p}2}(T))$ für $T \in H^{-1,\tilde{p}}(\Omega,\mathbb{R}^N)$.

Mit den entsprechenden Modifikationen folgt aber (2.6) $S_q^* = i_{pq} \circ S_p^*$ für $q > p > 2$, und das ist Lemma 2.3. Es sei ausdrücklich bemerkt, daß der Beweis von Lemma 2.3 (abgesehen von den Abbildungseigenschaften der Operatoren S_p, Σ_p) nirgendwo die Stetigkeit der Koeffizientenmatrix benutzt (und die Eigenschaften der Operatoren S_p, $\tilde{\Sigma}_p$ haben wir hier auf anderem Wege verifiziert). (ii) folgt wie in Satz 3. Q E D

Wir können daher eine Green-Matrix $G(\cdot,y)$ (und die zugehörige gemittelte Green-Matrix $G^\rho(\cdot,y)$) für $y \in \Omega$ wie in Paragraph 3 definieren, indem wir für $i,k = 1,\dots,N$ $G_k^i(\cdot,y) := (u_{\mu_k})^i$ setzen, wenn μ_k das vektorwertige Maß mit den Komponenten $\mu_k^i := \delta_{ik}\delta_y$, $i = 1,\dots,N$, bezeichnet, und u_{μ_k} wie in Lemma 7.1 definiert ist. Um jedoch von "der" Green-Matrix reden zu können, benötigen wir einen Eindeutigkeitssatz entsprechend zu Satz 3 (iii). Wie schon an anderer Stelle bemerkt wurde, ist Satz 3 (iii) bei nur meßbaren und beschränkten Koeffizienten falsch ([19]). Es stellt sich aber heraus, daß im hier vorliegenden Spezialfall $n = 2$ unter gewissen Zusatzforderungen an die Koeffizienten immer noch Eindeutigkeit in einer "vernünftigen" Funktionenklasse gilt.

Satz 18: Neben (7.1) sei die Symmetriebedingung $A_{\alpha\beta}^{ij} = A_{\beta\alpha}^{ji}$, $i,j = 1,\dots,N$, $\alpha,\beta = 1,2$ erfüllt. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(i) $G_k(\cdot,y)$ ist das einzige Element in der Klasse $\bigcap_{1\le r<2} \overset{o}{H}{}^{1,r}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ mit der Eigenschaft
$L_{ij}\, G_k^j(\cdot,y) = \delta_{ik}\cdot\delta_y$, $i,k = 1,\dots,N$, $y \in \Omega$.

(ii) $G(\cdot,y) \in H^{1,2}_{loc}(\Omega - \{y\}, \mathbb{R}^{N^2})$ für alle $y \in \Omega$.

(iii) Es gibt einen Exponenten $r_o := r_o(\lambda,\Lambda,N,\Omega)$ mit $1 < r_o < 2$, so daß für alle Exponenten r mit $r_o < r < 2$ und alle $y \in \Omega$ $G^\rho(\cdot,y)$ bei $\rho \downarrow 0$ schwach in $\overset{o}{H}{}^{1,r}(\Omega,\mathbb{R}^{N^2})$ gegen $G(\cdot,y)$ konvergiert.

□

Beweis von Satz 18: Sei $p_o \in \mathbb{R}$ mit $1 < p_o < 2$ fixiert, p sei ein Exponent im Intervall $[p_o,2]$. Bei vorgegebenem $F \in L^p(\Omega,\mathbb{R}^{2N})$ bezeichne $A^p : L^p(\Omega,\mathbb{R}^{2N}) \longrightarrow \overset{\circ}{H}{}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ den stetigen Operator, der F die nach Satz 1* eindeutig bestimmte schwache Lösung $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ von (*) $-\Delta u^i = -D_\alpha F^i_\alpha$, $i = 1,\dots,N$, auf Ω zuordnet. Normieren wir $\overset{\circ}{H}{}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ durch $\|u\|_{1,p} := \|\nabla u\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^{2N})}$, so wurde in Satz 1* bewiesen $\|A^p\| \le C(p)$, wo $C(p)$ abhängt von λ,Λ,N,Ω und p. Wir wählen für $C(p)$ die optimale Konstante. Ist $p = 2$, so folgt durch Test von (*) mit $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ sofort $C(2) \le 1$; betrachtet man aber $F^i_\alpha := D_\alpha u^i$ für eine Funktion $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, so gilt $C(2) \ge 1$, also $C(2) = 1$.

Mithin liefert der Riesz-Thorin Interpolationssatz ([7], p. 152):

(7.7) $C(p) \le C(p_o)^{\frac{p_o}{p}\cdot\frac{2-p}{2-p_o}}$ für alle $p \in [p_o,2]$.

Es sei $T^p : \overset{\circ}{H}{}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N) \longrightarrow \overset{\circ}{H}{}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, $T^p(u) := A^p(F)$ mit $F^i_\alpha := (\delta_{ij}\,\delta_{\alpha\beta} - \frac{A^{ij}_{\alpha\beta}}{\Lambda})D_\beta u^j$. Mit der Setzung $B(\zeta,\eta) := (\delta_{ij}\,\delta_{\alpha\beta} - \frac{A^{ij}_{\alpha\beta}}{\Lambda})\zeta^i_\alpha\,\eta^j_\beta$, $\zeta,\eta \in \mathbb{R}^{2N}$, gilt ($p' := \frac{p}{p-1}$):

$$\|T^p(u)\|_{1,p} \le C(p)\cdot\sup\{\int_\Omega B(g,\nabla u)\,dx : g \in L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^{2N}),\|g\|_{L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^{2N})} = 1\}$$

$$\le C(p)\ \sup\{\int_\Omega B(g,g)^{\frac12}\,B(\nabla u,\nabla u)^{\frac12}\,dx : g \in L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^{2N}),\|g\|_{L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^{2N})} = 1\}$$

nach der Cauchy-Schwarz Ungleichung für die positiv semi-definite symmetrische Form B auf $\mathbb{R}^{2N}$. Berücksichtigt man $B(\zeta,\zeta) \le (1-\frac{\lambda}{\Lambda})|\zeta|^2$ für $\zeta \in \mathbb{R}^{2N}$, so folgt:

$$\|T^p(u)\|_{1,p} \le C(p)\cdot(1-\tfrac{\lambda}{\Lambda})\ \sup\{\int_\Omega |\nabla u||g|\,dx : g \in L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^{2N}),\|g\|_{L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^N)} = 1\}$$

$$\le\ C(p)(1-\tfrac{\lambda}{\Lambda})\ \|u\|_{1,p} \le C(p_o)^{\frac{p_o}{p}\,\frac{2-p}{2-p_o}}\,(1-\tfrac{\lambda}{\Lambda})\ \|u\|_{1,p}$$

nach (7.7).

Nun gilt $1-\frac{\lambda}{\Lambda}<1$ und $C(p_o)^{\frac{p_o}{p}\frac{2-p}{2-p_o}} \to 1$ bei $p \uparrow 2$, daher können wir schließen: Es gibt ein r_o im Intervall $]1,2[$, welches von den im Satz genannten Parametern abhängt, so daß für p mit $r_o \le p \le 2$ die Operatoren T^p Norm <1 haben.

Nun betrachte man zwei Lösungen $u,\tilde{u} \in \bigcap_{1\le r<2} \overset{\circ}{H}{}^{1,r}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ des Systems $L_{ij}\, u^j = \mu^i$, $i=1,\dots,N$, mit signierten Radon-Maßen μ^i auf Ω von endlicher totaler Variation. Offenbar liegt $w := u-\tilde{u}$ in $\overset{\circ}{H}{}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ für $r_o \le p<2$ und erfüllt $-\Delta w^i = -D_\alpha\{(\delta_{ij}\,\delta_{\alpha\beta} - \frac{A^{ij}_{\alpha\beta}}{\Lambda})\, D_\beta w^j\}$, $i=1,\dots,N$, was $w = T^p w$ nach Satz 1* impliziert. Gemäß $\|T^p\|<1$ folgt aber $w=0$, womit (i) bewiesen ist.

(iii) Für reelle p mit $r_o \le p < 2$ gilt nach (7.6)
$\|G^\rho_k(\cdot,y)\|_{1,p} \le C(N,p,\lambda,\Lambda,\Omega)$ für alle $y\in\Omega$ und $0<\rho<\mathrm{dist}(y,\partial\Omega)$, $k=1,\dots,N$
Bei festem $y\in\Omega$ ist daher $G^{\rho_m}_k(\cdot,y)$ für eine geeignete positive Nullfolge $\{\rho_m\}$ schwach konvergent in $\overset{\circ}{H}{}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ gegen eine Funktion v aus diesem Raum. v löst dasselbe System wie $G_k(\cdot,y)$, das Eindeutigkeitsargument von oben ergibt $v = G_k(\cdot,y)$. Da der schwache Limes nicht von der Wahl der Nullfolge abhängt, schließen wir (iii).

(ii) Sei $y\in\Omega$ fest. $R>0$ erfülle $R<\frac{1}{2}\,\mathrm{dist}\,(y,\partial\Omega)$. Für $\rho<R$ sei $u := G^\rho_k(\cdot,y) \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, $k\in\{1,\dots,N\}$. Schließlich sei $\eta\in C^\infty(\overline{\Omega},[0,1])$ mit $\eta\equiv 1$ auf $\Omega - B_{2R}(y)$, $\eta\equiv 0$ auf $B_R(y)$ und $|\nabla\eta| \le \frac{2}{R}$. Aus
$$\int_\Omega A^{ij}_{\alpha\beta}\, D_\alpha\,(\eta^2\, u^i)\, D_\beta\, u^j\, dx = 0$$
wird mit einfachen Abschätzungen und der Sobolev-Ungleichung (Lemma 0.1 (i))
$$\int_{\Omega-B_{2R}(y)} |\nabla u|^2\, dx \le C\,\frac{1}{R^2}\int_{\Omega-B_R(y)} |u|^2\, dx \le C\,\frac{1}{R^2}\,\|\nabla u\|^2_{L^1(\Omega,\mathbb{R}^{2N})}$$
Nach (7.5) kann man die rechte Seite unabhängig von ρ und y abschätzen, es folgt

$$\|G^{\rho}(\cdot,y)\|_{H^{1,2}(\Omega-B_{2R}(y),\mathbb{R}^{N^2})} \leq C(R,N,\lambda,\Lambda,\Omega).$$

Also ist $G^{\rho}(\cdot,y)$ bei $\rho \downarrow 0$ schwach konvergent im Raum $H^{1,2}(\Omega-B_{2R}(y),\mathbb{R}^{N^2})$, und zwar notwendig gegen $G(\cdot,y)$ gemäß (iii). Daher gilt (ii).

QED

Anmerkung: Die Argumente in (i) sind dem Beweis von Theorem 2.5, p. 152, aus [7] entnommen worden. Tatsächlich ergibt der Beweis von (i) die Information, daß das System

(7.3) $L_{ij}\, u^j = -D_\alpha F^i_\alpha$, $i = 1,\dots,N$, auf Ω, $F \in L^p(\Omega,\mathbb{R}^{2N})$ vorgegeben,

unter den Voraussetzungen des Satzes genau eine Lösung $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ besitzt für alle Exponenten p mit $r_o \leq p \leq 2$. u ist nämlich genau dann $\overset{\circ}{H}{}^{1,p}$-Lösung von (7.8), wenn

$$-\Delta(u - T^p u)^i = -D_\alpha F^i_\alpha, \quad i = 1,\dots,N, \quad \text{auf } \Omega$$

gilt. Das System

$$-\Delta w = -D_\alpha F^i_\alpha, \quad i = 1,\dots,N \quad \text{auf } \Omega$$

hat nach Satz 1* genau eine Lösung $w \in \overset{\circ}{H}{}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$. Da T^p für p aus dem angegebenen Bereich eine strikte Kontraktion ist, folgt eindeutig Lösbarkeit von $u - T^p u = w$ in $H^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, und die Lösung u erfüllt (7.8).

Somit haben wir eine Verallgemeinerung von Satz 1* auf den Fall meßbarer und beschränkter Koeffizienten, allerdings unter den sehr speziellen Voraussetzungen $n = 2$ mit der zusätzlichen Symmetriebedingung $A^{ij}_{\alpha\beta} = A^{ji}_{\beta\alpha}$, $i,j = 1,\dots,N$, $\alpha,\beta = 1,2$. Überdies ergibt sich nicht für alle reellen $p > 1$ der Existenz- und Eindeutigkeitssatz in $\overset{\circ}{H}{}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, sondern nur für $p \geq r_o$, wo der "Grenzexponent" r_o wesentlich vom Elliptizitätsmodul $\frac{\lambda}{\Lambda}$ bestimmt wird und mit $\frac{\lambda}{\Lambda} \downarrow 0$

gegen 2 strebt. Das steht in Einklang zu den Beispielen aus Serrins Arbeit [19], die für Exponenten p mit $1 < p < r_o$ zeigen, daß der Eindeutigkeitssatz im allgemeinen nicht mehr gilt.

□

Nachdem wir Existenz und Eindeutigkeit der Green-Matrix bei nur meßbaren und beschränkten Koeffizienten untersucht haben, soll zum Abschluß bei stetiger Koeffizientenmatrix lokal bei $y \in \Omega$ die "kanonische Abschätzung" $|G(x,y)| \leq C \log \frac{1}{|x-y|}$ bewiesen werden. Wie schon in Paragraph 4 vereinbaren wir auch hier die Voraussetzungen

(7.9) $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sei ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, auf dem (GV) II/III gelten sollen:

Mit positiven Konstanten α und L, $\alpha \leq 1$, sei

$$\sup \{ \frac{|A^{ij}_{\gamma\delta}(x) - A^{ij}_{\gamma\delta}(y)|}{|x-y|^{\alpha}} : x \neq y \in \bar{\Omega},\ i,j = 1,\ \gamma,\delta = 1,2 \} \leq L .$$

□

Wir weisen darauf hin, daß aus (7.9) eine stärkere Eindeutigkeitsaussage als Satz 18 (i) folgt, denn wie schon bemerkt, gelten Satz 1 mit Korollar 1, 2 auch in zwei Dimensionen. Daher wird die Green-Matrix durch die Forderungen

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{es gibt ein } \varepsilon > 0 \text{ mit } G_k(\cdot,y) \in \overset{o}{H}{}^{1,1+\varepsilon}(\Omega,\mathbb{R}^N) \text{ und} \\ L_{ij}\, G^j_k(\cdot,y) = \delta_{ik} \cdot \delta_y,\ i = 1,\dots,N, \text{ schwach auf } \Omega \\ \text{für alle } y \in \Omega,\ k = 1,\dots,N \end{array} \right.$$

eindeutig festgelegt.

Um das Analogon zu Satz 8 für $n = 2$ zu erhalten, müssen wir zunächst die in Lemma 1.1 - Lemma 1.4 formulierten Aussagen entsprechend modifizieren. Dazu sei o.E. $0 \in \Omega$. Lemma 1.1 gilt unverändert (vgl. [18], p. 215/217), in Lemma 1.2 sind a) (iii) und die Abschätzung (1.7) aus b) nicht mehr erfüllt.

Um eine a) (iii) entsprechende Abschätzung zu erhalten, wähle man $f \in L^p(B_R(0))$ mit beliebigem reellen Exponenten $p > 1$ und Radius $R > 0$ und bezeichne mit ∇^{2N-2} irgendeine partielle Ableitung der Ordnung 2N-2. Dann ist der Kern $\nabla^{2N-2} K$ wesentlich homogen vom Grad 0, hat also die Form $\nabla^{2N-2}K(y) = C \cdot \log|y| + \varphi_1(y)$, $y \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$, mit einer Konstanten C, die abhängt von N, λ, Λ, p und einer vom Grad 0 homogenen Funktion φ_1.

Für $v(x) := \int_{B_R(0)} \nabla^{2N-2}K(x-\zeta) f(\zeta) d\zeta$, $x \in B_R(0)$, gilt deshalb nach dem Korollar zu Lemma 0.7:

$$R^{-1} \|\nabla v\|_{L^p(B_R(0))} \leq C(N,\lambda,\Lambda,p) \|f\|_{L^p(B_R(0))}$$

$$\|\nabla^2 v\|_{L^p(B_R(0))} \leq C(N,\lambda,\Lambda,p) \|f\|_{L^p(B_R(0))}$$

Nachfolgend sei C stets eine positive Konstante, abhängig von N, λ, Λ, p. Wir schätzen $\|v\|_{L^p(B_R(0))}$ ab:

$$\|v\|_{L^p(B_R(0))} \overset{\text{Lemma 0.6}}{\leq} C \int_{B_{2R}(0)} (1 + |\log|y||) dy \cdot \|f\|_{L^p(B_R(0))}$$

$$= C \left(R^2 + \int_0^{2R} |\log \rho| d\rho\right) \|f\|_{L^p(B_R(0))}$$

$$\leq C R^2 |\log R| \|f\|_{L^p(B_R(0))}$$

für $0 < R \leq \frac{1}{e}$. Somit ist gezeigt

(7.10) $$**\|v\|_{H^{2,p}(B_R(0))} := \|\nabla^2 v\|_{L^p(B_R(0))} + \frac{1}{R}\|\nabla v\|_{L^p(B_R(0))} + \frac{1}{R^2\cdot|\log R|}\|v\|_{L^p(B_R(0))}$$

$$\leq C \cdot \|f\|_{L^p(B_R(0))} \quad \text{für} \quad R \leq \frac{1}{e}.$$

Definieren wir die Potentialoperatoren P_R, $\tilde{P}_R$ wie in Paragraph 1, so gilt analog zu Lemma 1.3:

Lemma 7.2: Seien $p,R \in \mathbb{R}$ mit $p > 1$ und $R > 0$

(i) $\tilde{P}_R : L^p(B_R(0),\mathbb{R}^{2N}) \longrightarrow H^{1,p}(B_R(0),\mathbb{R}^N)$ ist ein stetiger linearer Operator, dessen Norm durch eine Konstante $C(N,\lambda,\Lambda,p)$ abgeschätzt wird, wenn man auf $H^{1,p}(B_R(0),\mathbb{R}^N)$ die Norm $*\|\cdot\|_{H^{1,p}(B_R(0),\mathbb{R}^N)}$ wählt.

(ii) $P_R : L^p(B_R(0),\mathbb{R}^N) \longrightarrow H^{2,p}(B_R(0),\mathbb{R}^N)$ ist linear und stetig; für $R \leq 1/e$ wird die Norm von P_R ebenfalls durch eine nur von N,λ,Λ,p abhängende Konstante abgeschätzt, wenn man auf $H^{2,p}(B_R(0),\mathbb{R}^N)$ die in (7.10) definierte Norm zugrunde legt.

□

Wie in Paragraph 1 benutzt man dieses Lemma zusammen mit dem unverändert gültigen Lemma 1.4, um lokal höhere Regularität einer schwachen Lösung u des Systems

(7.11) $$L_{ij}\, u^j = f^i - D_\alpha F^i_\alpha \,, \quad i = 1,\dots,N, \quad \text{auf } \Omega$$

zu beweisen, wenn f, F genügend gut lokal integrierbar sind. Seien dazu die Voraussetzungen (7.9) erfüllt, wobei allerdings nur Stetigkeit der Koeffizienten auf $\overline{\Omega}$ verlangt wird. Für ein

reelles p mit $1 < p < 2$ seien $u, f \in L^p_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $F \in L^q_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^{2N})$, $q := \frac{2p}{2-p}$, mit (7.11). Es gelte $B_{2R}(0) \subset \Omega$. Wie im Beweis von Satz 2 gilt mit den Notationen von dort die Identität (1.10)

$$\tilde{u} - T^p_{2R}\,\tilde{u} = \tilde{P}_{2R}(\tilde{F}) - P_{2R}(\tilde{f}) \ ;$$

für $R \le \min(R_o, \frac{1}{2}\operatorname{dist}(0, \partial\Omega))$ (R_o wie in Korollar 2 zu Satz 2) schließt man

$$\tilde{u} \in H^{1,q}(B_{2R}(0), \mathbb{R}^N) \quad \text{mit}$$

$$*\|\tilde{u}\|_{H^{1,q}(B_{2R}(0),\mathbb{R}^N)} \le C\{*\|\tilde{P}_{2R}(\tilde{F})\|_{H^{1,q}(B_{2R}(0),\mathbb{R}^N)} + *\|P_{2R}(\tilde{f})\|_{H^{1,q}(B_{2R}(0),\mathbb{R}^N)}\}$$

Nach Lemma 7.2 wird daraus (wenn man o.E. $R \le \frac{1}{e}$ verlangt)

(7.12) a) $$*\|u\|_{H^{1,q}(B_R(0),\mathbb{R}^N)} \le C\{|\log R|\,\|F\|_{L^q(B_{2R}(0),\mathbb{R}^{2N})} + \frac{|\log R|}{R} *\|u\|_{H^{1,p}(B_{2R}(0),\mathbb{R}^N)}$$
$$+ |\log R|\,\|f\|_{L^p(B_{2R}(0),\mathbb{R}^N)}\}, \quad C = C(N,\lambda,\Lambda,p)$$

b) $$*\|u\|_{H^{1,q}(B_R(0),\mathbb{R}^N)} \le C \cdot \frac{|\log R|}{R} *\|u\|_{H^{1,p}(B_{2R}(0),\mathbb{R}^N)}$$ im homogenen Fall

$\square$

Nach diesen Vorbereitungen können wir den folgenden Satz über das Wachstum der Green-Matrix beweisen.

Satz 19: Die Voraussetzungen (7.9) seien erfüllt, $\beta \in]0,1[$ wird beliebig vorgegeben. Dann findet man Konstanten C_1 abhängig von $N, \lambda, \Lambda, \alpha, L$, R_o zusätzlich abhängig von β und C_2 zusätzlich abhängig von Ω und β mit

(7.13) $$|G(x,y)| \le C_1 \log \frac{1}{|x-y|} + C_2\,|\log R|\,R^{-1+\beta}$$

für alle $x \in B_{2R}(y)$, $y \in \Omega$, $0 < R \le \min(R_o, \frac{1}{4}\operatorname{dist}(y, \partial\Omega))$.

Beweis: Wir übernehmen die Notationen aus dem Beweis von Satz 8 in Paragraph 4. Wie dort (vgl. 4.5) betrachtet man $w := G - T_{2R}^{p} G - E$ und zeigt $w \in H^{1,q}(B_{2R}(0), \mathbb{R}^N)$ (vgl. Lemma 4.1) mit

$$*\|w\|_{H^{1,q}(B_{2R}(0),\mathbb{R}^N)} \leq C_2 \cdot R^{-1} |\log R| \ ,$$ wobei man (7.12) b) an den entsprechenden Stellen benutzt. Das ergibt nach Lemma 0.1 (v)

$$\sup_{B_{2R}(0)} |w| \leq C_2 \cdot R^{\beta-1} |\log R| \ ,$$

und dieselbe Ungleichung erhalten wir auch für $\sum_{\ell=1}^{\infty} (T_{2R}^{q}) w$ statt w. Lemma 4.2 gilt unverändert, so daß wir bekommen (Bezeichnungen wie im Anschluß an Lemma 4.2)

$$\left| \sum_{\ell=1}^{\infty} (T_{2R}^{p_o}) E(x) \right| \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} C R^{\alpha} \int_{B_{2R}(0)} |x-\zeta|^{-1} |\nabla \psi_{\ell-1}(\zeta)| \, d\zeta$$

$$\leq \left(\sum_{\ell=1}^{\infty} C^{\ell-1} R^{\ell\cdot\alpha} \right) \cdot \int_{B_{2R}(0)} |x-\zeta|^{-1} \cdot |\zeta|^{-1} \, d\zeta \ .$$

Um den Beweis zu vervollständigen, müssen wir das logarithmische Wachstum des Integrals verifizieren:

Lemma 7.3: Für $R \leq \frac{1}{e}$ ist $\int_{B_R(0)} |x-y|^{-1} \cdot |y|^{-1} \, dy \leq C \cdot \log \frac{1}{|x|}$ für $x \in B_R(0) - \{0\}$ mit einer von x und R unabhängigen Konstanten C.

Beweis von Lemma 7.3: Es ist für $x \in B_R(0) - \{0\}$

$$\int_{B_{\frac{|x|}{2}}(0)} |y|^{-1} |x-y|^{-1} \, dy \leq \frac{2}{|x|} \int_{B_{\frac{|x|}{2}}(0)} |y|^{-1} \, dy = C \leq C \cdot \log \frac{1}{|x|} \ .$$

Auf $B_R(0) - B_{\frac{|x|}{2}}(0)$ ist $|x-y| \leq |x| + |y| \leq 2|y| + |y| = 3|y|$, also

$$\int_{B_R(0)-B_{\frac{|x|}{2}}(0)} |y|^{-1}\cdot|x-y|^{-1}\,dy = \int_{(B_R(0)-B_{\frac{|x|}{2}}(0))-B_{\frac{|x|}{2}}(x)} |x-y|^{-1}\cdot|y|^{-1}\,dy + \int_{B_{\frac{|x|}{2}}(x)} |x-y|^{-1}\cdot|y|^{-1}\,dy =$$

$$C\left\{\int_{B_{2R}(x)-B_{\frac{|x|}{2}}(x)} |x-y|^{-2}\,dy + \frac{1}{|x|}\int_{B_{\frac{|x|}{2}}(x)} |x-y|^{-1}\,dy\right\}$$

$$C\left(\left\{\log(2R) - \log\left(\frac{|x|}{2}\right)\right\} + 1\right) \leq C\cdot\log\frac{1}{|x|}\,.$$

|¯|

Damit ist die Abschätzung (7.13) bewiesen.

|QED|

Wie in Paragraph 4 vorgeführt wurde, gewinnt man aus (7.13) auch Schranken auf $|\nabla G(\cdot,y)|$ lokal bei $y\in\Omega$. Die entsprechende Aussage lautet

Satz 20: Die Voraussetzungen (7.9) seien erfüllt, $\beta\in\,]0,1[$ sei beliebig. Dann gibt es Konstanten C_1, C_2, R_o wie in Satz 19 mit

$$|\nabla_x G(x,y)| \leq C_1\frac{1}{|x|}\log\frac{1}{|x|} + C_2\cdot\frac{1}{|x|}R^{\beta-1}\,|\log R|$$

für alle $x\in B_R(y)-y$, $y\in\Omega$, $0<R\leq\min(R_o,\frac{1}{4}\,\mathrm{dist}\,(y,\partial\Omega))$.

|¯|

Es ist offensichtlich, daß man z.B. Satz 12 aus Paragraph 5 nun auch entsprechend in zwei Dimensionen formulieren und beweisen kann.

Zusammenfassung

Gegenstand der Arbeit sind neben Existenz und Eindeutigkeit die Eigenschaften und Anwendungsmöglichkeiten einer Green-Matrix $G : \Omega\times\Omega \to \mathbb{R}^{N^2}$ für lineare elliptische Systeme zweiter Ordnung von Operatoren in Divergenzform vom Typ $L_{ij} := -D_\alpha(A^{ij}_{\alpha\beta}D_\beta)$, $i,j=1,..,N$, die auf vektorwertige Sobolev-Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$ wirken, wobei die Matrix der Leitkoeffizienten stetig vom Gebietsparameter $x \in \Omega$ abhängt. Hierbei ist Ω ein beschränktes Lipschitz-Gebiet im Raum $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, und G soll folgende Eigenschaften haben:

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} &G^i_k(\cdot,y) \in \overset{o}{H}{}^{1,1+\varepsilon}(\Omega,\mathbb{R}) \text{ für ein } \varepsilon>o,\ i,k=1,..,N \\ &L_{ij}G^j_k(\cdot,y) = \delta_{ik}\,\delta_y,\ i,k=1,..,N \end{aligned} \qquad \forall\ y\in\Omega$$

(Hierbei ist $\overset{o}{H}{}^{1,p}(\Omega)$ der übliche Sobolev-Raum, δ_y ist das Dirac-Maß in $y \in \Omega$.)

Die Arbeit gliedert sich in drei Teile: Im ersten Teil fassen wir die nachfolgend benötigten Regularitätssätze für schwache Lösungen des Systems "(2) $L_{ij}u^j = -D_\alpha F^i_\beta$, $i = 1,..,N$ auf Ω" zusammen, die unter das Stichwort "L^p-Theorie" fallen. Es handelt sich hierbei einerseits um detaillierte lokale Abschätzungen in gewissen Sobolev-Räumen, zum anderen wird die globale Aussage bewiesen, daß die eindeutige $\overset{o}{H}{}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)$-Lösung von (2) im Raum $C^o_o(\Omega,\mathbb{R}^N) \cap \overset{o}{H}{}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ enthalten ist, wenn die "rechte Seite" F von (2) in einer Lebesgue-Klasse L^p mit Exponent $p > n$ liegt. Die von Littman, Stampacchia, Weinberger entwickelte "Dualisierungsmethode" übersetzt diesen globalen Regularitätssatz in die Aussage, daß das System "(3) $L_{ij}u^j = \mu^i$, $i = 1,..,N$ auf Ω" genau eine schwache Lösung $u \in \bigcap_{1\leq r<n/n-1} \overset{o}{H}{}^{1,r}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ hat, wenn signierte Radon-Maße μ^i, $i = 1,..,N$, auf Ω von endlicher totaler Variation vorgegeben sind. Durch spezielle Wahl der μ^i folgen Existenz und Eindeutigkeit der Green-Matrix im Sinne von (1). Daran anschließend diskutieren wir elementare Eigenschaften von G und beweisen u.a. gewisse Symmetriebeziehungen, die Stetigkeit von G als Funktion von zwei Variablen außerhalb der Diagonalen sowie die Aussage, daß sich die Lösung u von (3) mit Nullrandwerten als das mit dem Kern G und den Maßen μ^i gebildete Potential ergibt.

Der zweite Teil der Arbeit ist den Abschätzungen der Größen-

ordnung von $G(x,y)$ und $\frac{\partial}{\partial x} G(x,y)$ gewidmet, wobei wir die Koeffizienten des Systems als Hölder-stetig voraussetzen: Durch lokalen Vergleich mit einer Fundamentallösung zu konstanten Koeffizienten wird gezeigt, daß man auch im vorliegenden allgemeinen Fall das von der fundamentalen harmonischen Funktion bekannte Wachstum hat. Daraus ergibt sich mit der Campanato-Methode lokal bei $y \in \Omega$ eine Schranke für $\frac{\partial}{\partial x} G(\cdot,y)$. Überdies kann man die Hölder-Norm von $\frac{\partial}{\partial x} G(\cdot,y)$ auf Ringgebieten um y explizit ausrechnen.

Im letzten Teil geben wir Anwendungen der Resultate: Wir beginnen mit folgender Charakterisierung des Verhaltens einer schwachen Lösung u des homogenen Systems (2) auf $\Omega-\{y\}$ mit einer Singularität im Punkt $y\in\Omega$: Hat u Nullrandwerte auf $\partial\Omega$, und wächst die Funktion u bei $x \to y$ von schwächerer Potenzordnung als $|x-y|^{1-n}$, so ist u auf $\Omega-\{y\}$ Linearkombination der Spaltenvektoren der Green-Matrix, insbesondere können wir im Fall $u \neq o$ schließen, daß u genau von der Potenzordnung $|x-y|^{2-n}$ wachsen muß.

Anschließend benutzen wir die Darstellungsformel für schwache Lösungen u von (3), um Aussagen über deren Regularität zu machen, wenn die signierten Maße μ^i eine Bedingung der Form $\sup_{y\in\Omega} \int_\Omega |x-y|^{2-n} \, d|\mu|(x) < \infty$ (in Dimensionen $n \geq 3$) erfüllen. Dann ist jeder Punkt Lebesgue-Punkt von u, überdies ist u lokal beschränkt und generisch stetig. Dieses Ergebnis findet Anwendung in der Regularitätstheorie elliptischer Systeme mit quadratischem Wachstum.

Schließlich wird gezeigt, wie man die lokale Regularitätstheorie des ersten Teils benutzen kann, um bekannte Sätze aus der Theorie der elliptischen Systeme auf anderem Wege zu beweisen, z.B. erhalten wir einen Liouville-Satz für ganze Lösungen des homogenen Systems (2) und ein Weylsches Lemma für "sehr schwache" L^p-Lösungen von (2).

Literatur

[1] Adams, R.A.: Sobolev-Spaces Academic Press New York 1975

[2] Agmon, S., A. Douglis and L. Nirenberg: Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I., II. Comm. Pure Appl. Math. 12, 623-727 (1959), 17, 35-92 (1964)

[3] Agmon, S.: The L^p-Approach To The Dirichlet-Problem Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 13, 405-448 (1959)

[4] Campanato, S.: Equazioni ellittiche del secondo ordine e spazi $L^{2,\lambda}$, Ann. Mat. Pura e Appl. 69, 321-380 (1965)

[5] Cannarsa, P.: On a maximum-principle for elliptic systems with constant coefficients. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 64, 77-84 (1981)

[6] Frehse, J.: Essential selfadjointness of singular elliptic operators. Boll. Soc. Bras. Mat. 8, 87-107 (1977)

[7] Giaquinta, M.: Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems. Vorlesungsreihe SFB 72 no. 6

[8] Gilbarg, D., N.S. Trudinger: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1977

[9] Grüter, M., K.-O. Widman: The Green Function For Uniformly Elliptic Equations, manus. math 37, 303-342 (1982)

[10] Hildebrandt, S., K.-O. Widman: Some regularity results for quasilinear elliptic systems of second order, Math. Z. 142, 67-86 (1975)

[11] Hildebrandt, S., K.-O. Widman: On the Hölder-continuity of weak solutions of quasilinear elliptic systems

of second order. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (IV), 4, 145-178 (1977)

[12] Hirzebruch, F., W. Scharlau: Einführung in die Funktionalanalysis, B.I. Hochschultaschenbücher 1970

[13] John, F.: Plane Waves and Spherical Means Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1955

[14] Ladyshenskaya, O.A., N.N. Uraltseva: Linear and quasilinear elliptic equations, Academic Press New York 1968

[15] Littman, W., G. Stampacchia, H.F. Weinberger: Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (III), 17, 43-77 (1963)

[16] Meier, M.: Liouville theorems for non diagonal elliptic systems in arbitrary dimensions. Math. Z. 176, 123-133 (1981)

[17] Meyers, N.G.: An L^p-estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (III) 17, 189-206 (1963)

[18] Morrey, C.B. jr.: Multiple integrals in the calculus of variations, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1966

[19] Serrin, J.: Pathological solutions of elliptic equations, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 18, 385-387 (1964)

[20] Solonnikov, V.A.: On general boundary problems for systems which are elliptic in the sense of A. Douglis and L. Nirenberg. I. II., American Math. Soc. Trans., Series 2, Vol. 56, 1966, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, no. 92, 1966